

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24700004

研究課題名(和文) グラフマイナーアルゴリズムにおける双対概念の利用

研究課題名(英文) Using dual concepts in graph minor algorithms

研究代表者

小林 佑輔 (KOBAYASHI, Yusuke)

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：40581591

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：辺素パス問題とはグラフ上で指定された頂点对を互いに辺を共有しないパスで繋ぐ問題であり、VLSI設計や交通網の応用を動機として研究されている。また、この問題は離散数学における深遠な理論であるグラフマイナー理論を用いて解決された点で理論的にも興味深い問題である。本研究では、辺素パス問題とその様々な関連問題に対して、ある種の双対性に注目することで効率的なアルゴリズムを与えた。

研究成果の概要(英文)：The edge-disjoint paths problem is a problem of connecting given pairs of vertices by edge-disjoint paths, which is motivated by applications in VLSI design and transportation networks. This problem is also theoretically interesting, because it was solved by using graph minor theory, which is a profound theory in discrete mathematics. In this study, we show efficient algorithms for the edge-disjoint paths problem and its related problems by using a certain kind of duality in the problems.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：アルゴリズム グラフ 組合せ最適化 辺素パス問題 グラフマイナー理論

## 1. 研究開始当初の背景

グラフやネットワークなど離散構造上のアルゴリズムの研究において、既に提案されている多項式時間アルゴリズムの多くは、「動的計画法に基づくもの」と「双対概念を利用したもの」の2種類に大別することができる。

しかし、近年提案されている難解な多項式時間アルゴリズムの中には、これら2種類の枠組みに当てはまらないものも見受けられる。その代表的なものが、グラフマイナー理論に基づくアルゴリズムである。グラフマイナー理論はグラフ理論における最も重要な理論体系の一つであり、1980年代からのRobertson and Seymourによる20編以上の論文にわたる一連の研究によって確立された。この理論の中で、いくつかのグラフの問題に対する多項式時間アルゴリズムが構成されており、特に、グラフアルゴリズムの分野における基本的かつ重要な問題である点素(辺素)パス問題がグラフマイナー理論を用いて解決されている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、グラフマイナー理論に基づく難解なアルゴリズムと、既存の枠組みである「動的計画法」や「双対概念」との関係性を明らかにすること、および、その結果を用いてグラフマイナー理論に基づくアルゴリズムを改良することである。具体的には、以下の課題に取り組む。

### (1) グラフマイナーアルゴリズムの解釈

既存のグラフマイナー理論に基づくアルゴリズムを、「動的計画法」や「双対概念」の視点から解釈することを目的とする。木幅とグリッドの大きさの関係を「双対概念」として理解することを目指す。

### (2) 簡略化・高速化・最適化問題への応用

グラフマイナーアルゴリズムを別視点から解釈することを通じて、既存アルゴリズムの簡略化、高速化、適用範囲の拡大といった改良を目指す。

### (3) 緩和された最大最小定理を持つ問題に対するアルゴリズムの研究

組合せ最適化においては、『最大最小定理が存在すれば、それを用いて多項式時間アルゴリズムが得られる』という構図が典型的な双対概念の利用方法である。しかし、グラフマイナーアルゴリズムにおいては、単純な形の最大最小定理が利用できることは期待できないため、最大最小定理を何らかの意味で緩和した概念を「双対概念」として理解することを目指す。

### (4) その他のアルゴリズム

グラフマイナーアルゴリズム以外の多項式時間アルゴリズムに対しても、「動的計画法」や「双対概念」との関係性が明確でないものの解釈を与える。

## 3. 研究の方法

グラフマイナーアルゴリズムでは、「木幅」と「グリッド」と呼ばれる二つの概念が重要な役割を果たす。そこで、まずはこの二つの概念の関係性を明確にし、これらを「双対」の視点から理解することを試みる。その際、必要に応じてこれらに類似した概念を提案することやアルゴリズムを変更することを行う。また、「課題(3) 緩和された最大最小定理を持つ問題に対するアルゴリズムの研究」に取り組むことで、どのような性質を「双対」とみなすのかを明確にすることも行う。双対概念を用いてグラフマイナーアルゴリズムを解釈できれば、その結果を用いて、簡略化・高速化・最適化問題への応用を行う。また、以上の流れとは別に、グラフマイナーアルゴリズムに対して得られた結果が、それ以外の難解なアルゴリズムに対して適用できないか検討する。

## 4. 研究成果

本研究の一つ目の成果は、グラフマイナー理論で重要な役割を果たす「木幅」と「グリッド」と呼ばれる二つの概念の関係性について、従来の結果を改良する結果を与えたことである。多くのグラフマイナー理論に基づくアルゴリズムは、木幅の大小に応じて2つの方針を組み合わせることで理論的に効率的なアルゴリズムを得ている。具体的には、木幅が小さいグラフに対しては動的計画法を用いて効率よく問題を解き、木幅が大きなグラフに対しては大きなグリッドが存在するので、そのグリッドに注目することで「問題に関係のない部分」を抽出することで、元の問題をより小さなグラフにおける問題に帰着する。これら2つの方針を組み合わせたアルゴリズムの計算時間を評価するためには、木幅の大きさに比べてどれくらい大きなグリッドを取ることができるかを評価することが重要となる。

本研究では、「 $2$  の  $(r^2 \log r)$  乗の木幅を持つグラフがサイズ  $r$  のグリッドマイナーを持つこと」を示しており、これはRobertson, Seymour, and Thomasによって1994年に与えられた $2$  の  $(r^5)$  乗のバウンドを改良するものである。本研究成果はグラフ理論において重要な成果であるのみならず、木幅とグリッドの関係はグラフマイナーアルゴリズムで重要な役割を果たすことから、効率的なアルゴリズムの設計においても有用な成果であるといえる。さらに、同論文では、ある種の性質を持つグラフにおいては、木幅とグリッドマイナーの関係がよ

り良い評価をできることを示している。

二つ目の成果は辺素パス問題と関連する問題に対して効率的なアルゴリズムを与えたことである。辺素パス問題とはネットワーク上で指定された頂点对を互いに辺を共有しないパスで繋ぐ問題であり、交通ネットワークや VLSI 設計を動機として理論・応用の両面から盛んに研究されている計算機科学分野における重要な問題である。辺素パス問題は、グラフマイナーアルゴリズムを用いて解決された最も有名な問題の一つであることから理論研究において特に注目を集めている。

本研究では、辺素パス問題やその一般化である多品種流問題の様々なケースに対して効率的なアルゴリズムの提案を行った。以下では例として二つの研究成果について述べる。

ACM Transactions on Algorithms に採択された我々の論文 "An improved approximation algorithm for the edge-disjoint paths problem with congestion two" においては、ある種の辺素パス問題に対して、既存の最良近似比を改善するアルゴリズムを与えている。具体的には、1つの辺を2回まで使うことを許した設定で、頂点对が与えられたときに、すべての頂点对を繋ぐのではなく、頂点对を繋ぐ辺素パスの本数を最大化する問題を扱っている。この問題に対して、既存研究では頂点数の  $1/2$  乗に比例する近似比のアルゴリズムしか知られていなかった。本研究ではこの既存の近似比を改善し、頂点数の  $3/7$  乗に比例する近似比のアルゴリズムを与えている。本研究成果は理論的な近似比の限界を押し進めたという意味で重要な貢献である。

通信ネットワークのトップ会議である INFOCOM に採択された我々の論文 "Max-flow min-cut theorem and faster algorithms in a circular disk failure model" は、広範囲の損傷を考慮したネットワークの信頼性評価を双対性に着目することで行っている。ネットワークの信頼性を評価する上では、いくつかリンクが壊れたときに通信全体にどのような影響を与えるかを調べることは重要である。古典的な組合せ最適化問題のひとつである最小カットはこのような状況を解析するために有用であるが、リンクが独立にひとつずつ除去される状況しか扱えない。本研究では、地震や洪水などの自然災害によって生じる広範囲の損傷を扱うために、損傷が発生しうる領域を円板によってモデル化した問題を扱った。この問題は 2012 年に Neumayer らによって提案され、多項式時間アルゴリズムが設計されたが、その双対に対応するパスの詰め込み問題の多項式時間可解性は未解決のまま残されていた。本研究では、双対定理を見出すことでこの未解決問題を肯定的に解決した。さらに、最小カッ

ト問題に対して既存アルゴリズムよりも高速なアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは、オペレーションズ・リサーチ分野のトップジャーナルである European Journal of Operational Research に採録された我々の論文 "Improved max-flow min-cut algorithms in a circular disk failure model with application to a road network" においてさらに改良され、実データによって有用性が確認された。

我々の三つ目の成果は奇数長の閉路の詰め込みに関する成果である。辺素パス問題は、奇数長の閉路を詰め込む問題に容易に帰着できることが知られており、この事実から奇数長閉路の詰め込み問題も理論計算機科学や離散数学において興味深い問題として認識されている。離散数学のトップジャーナルである Journal of Combinatorial Theory, Series B に採録された我々の論文 "Edge-disjoint odd cycles in 4-edge-connected graphs" は、4 辺連結グラフにおいて、奇数長閉路の詰め込み問題と奇数長閉路の被覆問題の間に、ある種の双対の関係が成り立つことを示している。通常の場合には、どのようなグラフに対してもこの双対関係が成り立つことが知られているものの、奇数長閉路の詰め込み問題に対しては一般にはこの双対関係が成り立たないことが知られており、どのような条件下でこの関係が成立するのかがグラフ理論の分野で注目を集めてきた。本研究成果は、この疑問に対してある意味で回答を与えるものであり、4 辺連結性が鍵となる性質であることを示している。本研究は双対性が成り立つ場合と成り立たない場合の本質的な違いの解明に繋がるものであると考えられる。さらに、同じ議論を用いて、奇数長閉路の詰め込み問題に対して初めての効率的なアルゴリズム（固定パラメータアルゴリズム）を与えており、本研究成果はグラフアルゴリズムの分野にも貢献するものである。

奇数長閉路の双対性を示した上述の研究を受けて、より制約を加えた問題に対しても同様の双対性が成り立つのかどうか自然な疑問として生じる。我々は、奇数長閉路に対する成果を拡張し、指定頂点を通る奇数長閉路の詰め込み問題に対しても 4 辺連結グラフにおいては同様の双対性が成り立つことを示した。この成果をまとめた我々の論文 "Packing edge-disjoint odd Eulerian subgraphs through prescribed vertices in 4-edge-connected graphs" は SIAM Journal on Discrete Mathematics に採録が決定している。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 25 件)

1. N. Kakimura, K. Kawarabayashi, and Y. Kobayashi: Packing edge-disjoint odd Eulerian subgraphs through prescribed vertices in 4-edge-connected graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, to appear. (査読有)
2. Y. Kobayashi and S. Toyooka: Finding a shortest non-zero path in group-labeled graphs via permanent computation, *Algorithmica*, 77 (2017), pp. 1128--1142. (査読有)
3. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: An improved approximation algorithm for the edge-disjoint paths problem with congestion two, *ACM Transactions on Algorithms*, 13 (2016), Article 5. (査読有)
4. K. Bérczi, T. Király, and Y. Kobayashi: Covering intersecting bi-set families under matroid constraints, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30 (2016), pp. 1758--1774. (査読有)
5. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: Edge-disjoint odd cycles in 4-edge-connected graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 119 (2016), pp. 12--27. (査読有)
6. K. Otsuki, Y. Kobayashi, and K. Murota: Improved max-flow min-cut algorithms in a circular disk failure model with application to a road network, *European Journal of Operational Research*, 248 (2016), pp. 396--403. (査読有)
7. A. Bernáth, Y. Kobayashi, and Tatsuya Matsuoka: The generalized terminal backup problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29 (2015), pp. 1764--1782. (査読有)
8. K. Ishihara and Y. Kobayashi: Routing algorithms under mutual interference constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 58 (2015), pp. 209--222. (査読有)
9. Y. Kobayashi: The complexity of minimizing the difference of two  $M^{\natural}$ -convex set functions, *Operations Research Letters*, 43 (2015), pp. 573--574. (査読有)
10. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: The edge-disjoint paths problem in Eulerian graphs and 4-edge-connected graphs, *Combinatorica*, 35 (2015), pp. 477--495. (査読有)
11. H. Flier, Y. Kobayashi, M. Mihalák, A. Schöbel, P. Widmayer, and A. Zych: Selecting vertex disjoint paths in plane graphs, *Networks*, 66 (2015), pp. 136--144. (査読有)
12. A. Kawamura and Y. Kobayashi: Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds, *Distributed Computing*, 28 (2015), pp. 147--154. (査読有)
13. Y. Kawase, Y. Kobayashi, and Y. Yamaguchi: Finding a path in group-labeled graphs with two labels forbidden, *Proceedings of the 42nd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2015)*, 2015, pp. 797--809. (査読有)
14. T. Ito, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, and Y. Okamoto: Minimum-cost b-edge dominating sets on trees, *Proceedings of the 25th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2014)*, LNCS 8889, 2014, pp. 195--207. (査読有)
15. K. Kawarabayashi, Y. Kobayashi, and S. Kreutzer: An excluded half-integral grid theorem for digraphs and the directed disjoint paths problem, *Proceedings of the 46th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2014)*, 2014, pp. 70--78. (査読有)
16. Y. Kobayashi and K. Otsuki: Max-flow min-cut theorem and faster algorithms in a circular disk failure model, *Proceedings of the 33rd Annual IEEE International Conference on Computer Communications (INFOCOM 2014)*, 2014, pp. 1635--1643. (査読有)
17. A. Bernáth and Y. Kobayashi: The generalized terminal backup problem, *Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2014)*, 2014, pp. 1678--1686. (査読有)
18. Y. Kobayashi: Triangle-free 2-matchings and  $M$ -concave functions

- on jump systems, *Discrete Applied Mathematics*, 175 (2014), pp. 35--42. (査読有)
19. R. Fujita, Y. Kobayashi, and K. Makino: Robust matchings and matroid intersections, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27 (2013), pp. 1234--1256. (査読有)
  20. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: An  $O(\log n)$ -approximation algorithm for the edge-disjoint paths problem in Eulerian planar graphs, *ACM Transactions on Algorithms*, 9 (2013), Article 16. (査読有)
  21. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: All-or-nothing multicommodity flow problem with bounded fractionality in planar graphs, *Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2013)*, 2013, pp. 187--196. (査読有)
  22. A. Kawamura and Y. Kobayashi: Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds, *Proceedings of the 23rd International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2012)*, LNCS 7676, 2012, pp. 598--608. (査読有)
  23. Y. Kobayashi, K. Murota, and R. Weismantel: Cone superadditivity of discrete convex functions, *Mathematical Programming, Series A*, 135 (2012), pp. 25--44. (査読有)
  24. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: Fixed-parameter tractability for the subset feedback set problem and the  $S$ -cycle packing problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102 (2012), pp. 1020--1034. (査読有)
  25. Y. Kobayashi, J. Szabó, and K. Takazawa: A proof of Cunningham's conjecture on restricted subgraphs and jump systems, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102 (2012), pp. 948--966. (査読有)
- [学会発表](計 12 件)
1. K. Bérczi and Y. Kobayashi: The directed disjoint shortest paths problem, Southern Italian Workshop on Algorithms and Graphs 2016, Puglia, Italy, September 2016.
  2. Y. Kobayashi and K. Takazawa: Randomized strategies for cardinality robustness in the knapsack problem, The 13th Meeting on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO 2016), Arlington, USA, January 2016.
  3. N. Kakimura, K. Kawarabayashi, and Y. Kobayashi: Packing edge-disjoint odd  $S$ -cycles in 4-edge-connected graphs, SIAM Conference on Discrete Mathematics 2014, Minneapolis, USA, June 2014.
  4. Y. Kobayashi and K. Otsuki: Max-flow min-cut theorem and faster algorithms in a circular disk failure model, The 33rd Annual IEEE International Conference on Computer Communications (INFOCOM 2014), Toronto, Canada, May 2014.
  5. A. Bernáth and Y. Kobayashi: The generalized terminal backup problem, The 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2014), Portland, USA, January 2014.
  6. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: All-or-nothing multicommodity flow problem with bounded fractionality in planar graphs, The 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2013), Berkeley, USA, October 2013.
  7. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi: Linear min-max relation between the treewidth of  $H$ -minor-free graphs and its largest grid minor, The Asian Mathematical Conference 2013 (AMC 2013), Busan, Korea, July 2013.
  8. Y. Kobayashi: Triangle-free 2-matchings and  $M$ -concave functions on jump systems, The 8th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Veszprem, Hungary, June 2013.
  9. Y. Kobayashi and Xin Yin: An algorithm for finding a maximum  $t$ -matching excluding complete partite subgraphs, The 21st International Symposium on Mathematical

Programming (ISMP 2012), Berlin, Germany, August 2012.

10. 小林佑輔: 有向木詰め込みに関する最大最小定理, 日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の基盤とフロンティア」研究部会(W00), 東京理科大学(東京都新宿区), 2015年3月.
11. 小林佑輔: Max-flow min-cut theorem and faster algorithms in a circular disk failure model, JST ERATO 河原林巨大グラフプロジェクト・感謝祭 Summer 2014, 国立情報学研究所(東京都千代田区), 2014年8月.
12. 小林佑輔: 点素パス問題に対するアルゴリズム, 組合せ最適化セミナー, 京都大学(京都府京都市), 2012年7月.

〔図書〕無し

〔産業財産権〕無し

〔その他〕無し

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

小林 佑輔 (KOBAYASHI, Yusuke)  
筑波大学・システム情報系・准教授  
研究者番号: 40581591

##### (2) 研究分担者

無し

##### (3) 連携研究者

無し

##### (4) 研究協力者

無し