1版

様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 5 月 19 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７０００１０
研究課題名（和文）劣加法構造探索による計算理論の新展開

研究課題名（英文）New Development of Computation Theory by Exploring the Subadditive Structure

研究代表者
上野　賢哉（Ueno, Kenya）

京都大学・白眉センター・助教

研究者番号：７０５８６０８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究計画では、アルゴリズム理論と計算量理論の双方に現れる劣加法構造に着目し構造的性質を探索していくことで、アルゴリズムと計算量という融合的な枠組みの中から計算理論に対する新たな潮流を創成することを目指して来た。結果として、論理式サイズ下界の証明方法、整数計画問題に対する指数時間厳密解法、そして、整数計画法の多面体構造の解析などの研究トピックに対して、統一的な観点から進展を与えることができた。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we have aimed at creating a new current in the theory of computatoin from harmonized view of algorithms and computational complexity theory by focusing on subadditive structures which appear in both of them. Consequently, we have made progress on some research topics such as proof methos for formula-size lower bounds, exact exponential algorithms for integer programs and analysis of polyhedral structure of integer programs from the harmonized view.

研究分野：計算の基礎理論

キーワード：計算量理論　線形計画法　整数計画法　論理関数

１．研究開始当初の背景

アルゴリズム理論における一般的枠組みとして線形計画法と整数計画法がある。線形計画法の双対定理はよく知られているが、整数計画法に対する双対定理というものも古くから研究されてきた。これらの理論によると、線形計画法に対する双対問題は加法な構造をしているのに対し、整数計画法に対する双対問題は劣加法な構造をしている。

一方、計算量理論における最も重要な概念としてあげられるのが計算量クラス P、NP である。P は計算が容易な問題の集合として定義され、線形計画問題は P に属することが知られている。これに対して、整数計画問題は一般に NP 困難と呼ばれる計算が困難な問題の代表例でもある。つまり、加法構造は計算が容易であるが、劣加法構造は一般には計算が困難であるといった対応づけを知ることができる。

以上で述べた加法構造と劣加法構造の対応関係は、主にアルゴリズム的な側面（線形計画法と整数計画法）から見たものであったが、実は近年、計算量理論の中でも論理式サイズ下界に関する問題において、その証明の実現可能性と困難性の狭間が本質的に、この加法構造と劣加法構造で説明されることが明らかにされてきた。つまり、既存の論理式サイズ下界証明の枠組みは、整数計画問題が計算困難であることと同じ理由により、証明の限界に打ち当たってしまうと言うことができる。

我々のこれまでの研究では、この限界の認識にさきがけて、一般には取扱いが困難な劣加法構造の中でも、実際的に取り扱うことが可能な範囲の劣加法構造が存在することを明らかにしてきた。本研究計画は、これらの成果をさらに発展させた上で、計算量理論のみならずアルゴリズム理論に対しても適用できるような包括的な枠組みの中で理論構築を行い、そのインパクトを与えることを目指すものである。

論理式サイズ下界証明に関しては、長年にわたって多くの努力がなされる一方で、未だにこれらの問題を解決するための決定的な方向性すら見つかっていないというのが現状であり、この限界突破のためには本質的に新しい技術が求められている。

２．研究の目的

計算理論は大きく分けて計算の可能性を明らかにしようとするアルゴリズム理論と計算の限界を明らかにしようとする計算量理論に大きく２分される。

本研究計画では、この両方に現れる「劣加法構造」に着目し、その構造的性質を探索していく。これにより、算法と計算量という統合的な枠組みの中で計算理論に対する新たな潮流を創成することを目指す。

具体的には、論理式サイズ下界の証明方法や整数計画問題の双対問題に対する解法などへの統一的な新展開を目指す。

これまで培ってきた線形計画法の理論を利用した論理式サイズ下界の証明方法の改良を研究の主軸としながら、多方面の領域へ展開し、最終的に包括的な視点を与えることを目指す。劣加法構造の探索の可能性と限界について理論的に解明していく。

具体的には、本研究で既に開発している論理式サイズの強力な下界となりうる線形計画定式化に対して、計算機実験を援用しながら理論解析を行い、下界の改良を目指す。

これらの解析を通じて得たアイデアなどを線形計画法や整数計画法などのアルゴリズム理論へとも還元していき、最終的に計算理論全般へと通用する包括的な理論的枠組みの構築を行う。

３．研究の方法

劣加法性とは、ある構造の集合 S に対して、そこから実数への写像 $\mu:X\to R$ を考える。x+y といた２項演算子が構造に対して定まるとする。このとき、劣加法性とは、任意の x,y ∈S に対して

$$\mu(x) + \mu(y) \geqq \mu(x + y)$$

となるような性質のことを言う。この不等式が、以下のように等式で成り立つならば

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(x+y)$$

この性質のことを加法性と呼ぶ。

Karchmer, Kushilevitz and Nisan は、線形計画理論における線形緩和・双対定理を利用し、論理式サイズ下界を与える LP Bound と呼ばれる手法を導入した。彼らの証明手法では、論理式サイズの下界を、ある特定の整数計画問題の最適解として定式化し、その LP 緩和の双対問題に対する実行可能界を与えることで、下界値を与える。この手法は、加法な構造と捉えることができる。

一方で、研究代表者の近年の研究において、この Karchmer らの手法を拡張し、いくつかの論理関数に対してその論理式サイズ下界を改良することに成功してきた。これらの研究で与えてきた線形計画法の定式化は劣加法な構造を有しており、原理的には任意の論理関数に対してその最適な下界を証明する潜在能力を秘めたものである。これらの成果に関しては、計算量理論の研究者だけでなく、アルゴリズム理論の研究者からもその定式化の持つ特性に関して評価を受けている。

本研究計画では、この線形計画法への解空間を探索することを目的とし、そのための方法としては、紙の上での数学的論証から解空間を探索し、目的関数値を押し上げることにより、下界値を漸近的に改良していく。このために計算機を援用した実験および結果の解析も実行していき、理論解析の足掛りとする。さらに、エントロピー理論や測度論などの理論的枠組みを調査し、応用可能な道具を

見出す。最終的に、線形計画法や整数計画法などのアルゴリズム理論を含めた包括的な理論的枠組みを構築し、計算理論の新展開を導き出すことを目指す。

４．研究成果

本研究計画では、アルゴリズム理論と計算量理論の双方に現れる劣加法構造に着目し構造的性質を探索していくことで、アルゴリズムと計算量という融合的な枠組みの中から計算理論に対する新たな潮流を創成することを目指してきた。

これまで培ってきた線形計画法の理論を利用した論理式サイズ下界の証明方法の洗練を研究の主軸としながら、多方面の領域へ展開し、最終的に包括的な視点を与えることを目指すことで、主として以下に述べるような研究成果を得る事ができた。

一般に NP 困難な問題に対しては, P≠NP の仮定のもと, 多項式時間アルゴリズムを与えることはできない。全探索により入力サイズ n に対して $O(2^n)$時間で動く指数時間アルゴリズムを与えることができる。一方で、上手い工夫を施すことで全探索よりも高速に動く限界突破型アルゴリズムを与えられる問題例の存在が知られている。

本研究では, 多くの NP 困難な問題を特殊例として内包する整数計画問題（等式制約型、0-1 変数）に関して研究を行い、全数探索よりも二次的に高速で動く $O(2^{n/2})$時間・$O(2^{n/4})$領域のアルゴリズムを設計することができた。そして、そのプログラムを実装し、計算機実験を行ってきた。

現代の整数計画法ソルバーでは 100 変数程度の問題は簡単に解くことができるが、これは問題自体に内在する良い数理構造を利用しているからであり、最悪の場合

2 の 100 乗 =

1267650600228229401496703205376

の解を探索する必要がある。提案手法では、例えどんな悪い入力を与えられたとしてもこのような膨大な個数の解空間を平方根程度以内の処理個数

2 の 50 乗 = 1125899906842624

で計算可能である。さらに、領域計算量に関しては、

2 の 25 乗 = 33554432

程度のオーダーで、抑えられることが分かっている。つまり、提案手法は数理的に良い構造を持たない性質の悪い問題に対しても、安定した解法を提供ができるといった利点がある。

汎用的な解法として重要である整数計画法に対しては、これまでに多くの技術的な改良が施されてきた一方で、最悪時間計算量に関する理論保障は与えた研究は非常に少ない。本研究は、一般的な問題設定において、最悪時間・空間の計算量の上界を与えることに成功した独創的なものである。

技術的には、Impagliazzo らにより研究されてきた特定の回路計算量（段数を制限した閾値回路）に対する限界を証明するための技法を応用したものである。３０年以上前に開発されてきた手法に対して、計算量理論において提唱された概念を組み合わせることで一般化に成功した研究内容である。これは、近年の当該分野のトレンドであるアルゴリズム理論と計算量理論の相生的な技術発展を実現した特色のあるものである。

整数計画法は、応用事例として数多くの組合せ最適化問題を含む重要な問題であることは周知の事実である。したがって、本質的に計算が困難な問題への応用が期待されるなど、予想される意義は計り知れない。整数計画法に対する既存の手法（分枝限定法）などとも組み合わせることが可能であるため提案手法の応用の可能性は拡げていくことができると期待できる。今後の課題として, 理論的な深化とともに開発したアルゴリズムの実用的な有用性を示すことが重要である。

また、計算理論に現れる劣加法性という観点から、これまでの研究および関連研究を総括し、学会においてチュートリアル講演を行うとともに、サーベイ論文として論文を執筆し Interdisciplinary Information Sciences に掲載予定となっている。この論文では、論理式サイズ下界の証明方法や整数計画問題の双対問題に対する解法などへの統一的な新展開を与えることができた。

総じて、劣加法構造の探索の可能性と限界について理論的に解明していくことができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Kenya Ueno: Exploring the Limits of Subadditive Approaches: Parallels between Optimization and Complexity Theory, Interdisciplinary Information Sciences, Tohoku University. 査読有, 掲載決定済
https://www.is.tohoku.ac.jp/publication/IIS.html

② Kenya Ueno: Candidate Boolean Functions towards Super-Quadratic Formula Size, IEICE Transactions on Information and Systems, Vol. E98-D, No. 3, pp. 524-531, March 2015. 査読有

③ Kenya Ueno: Breaking the Rectangle Bound Barrier against Formula Size Lower Bounds, International Journal of

Foundations of Computer Science, Vol. 24, No. 8, pp. 1339-1354, World Scientific, December 2013. 査読有
DOI: 10.1142/S0129054113500378

④ 上野 賢哉： 線形計画法と計算限界（小特集 計算限界の解明への多面的アプローチ ―P vs NP に向けた最前線―）, 電子情報通信学会会誌, Vol 96, No. 9, pp. 675-678, 2013 年 9 月. 査読有
http://ci.nii.ac.jp/naid/110009660608

⑤ Kenya Ueno: A Stronger LP Bound for Formula Size Lower Bounds via Clique Constraints. Theoretical Computer Science, Vol. 434, pp. 87-97, Elsevier, May 2012. 査読有
DOI: 10.1016/j.tcs.2012.02.005

⑥ Kenya Ueno: Formula Complexity of Ternary Majorities. Lecture Notes in Computer Science 7434, pp. 433-444, Springer-Verlag, 2012. 査読有
DOI: 10.1007/978-3-642-32241-9_37

〔学会発表〕（計７件）

① Kenya Ueno: Exact Algorithms for 0-1 Integer Programs with Linear Equality Constraints, ELC Mini-Workshop on Boolean Functions, November 6-10, 2014.

② 上野 賢哉: Exact Algorithms for 0-1 Integer Programs with Linear Equality Constraints, 情報処理学会 アルゴリズム研究会, 愛媛県松山市, 2014 年 6 月 13 日.

③ Kenya Ueno: Inapproximability of Linear Programs for the Universal Relation, ELC Workshop on Inapproximability, The University of Electro-Communications, January 25-26, 2014. 招待講演

④ 上野 賢哉: 劣加法性で横断する最適化から計算限界, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 第 25 回 RAMP シンポジウム, 鹿児島大学, 2013 年 10 月 29-30 日. 招待講演

⑤ 上野 賢哉: 計算複雑さへの招待 (3)：数理計画法から攻める計算限界, 電子情報通信学会 コンピュテーション研究会, 奈良女子大学, 2013 年 6 月 24 日. 招待講演

⑥ Kenya Ueno: Formula Complexity of Ternary Majorities. The 18th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2012), Sydney, Australia, August 20-22, 2012.

⑦ 上野 賢哉: Candidate Boolean Functions towards Super-Quadratic Formula Size, 電子情報通信学会コンピュテーション研究会, 北海道札幌市, 2012 年 6 月 14 日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
上野 賢哉（UENO KENYA）
京都大学・白眉センター・特定助教
研究者番号： ７０５８６０８１

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：