

平成 26 年 6 月 24 日現在

機関番号：25101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2013

課題番号：24700016

研究課題名(和文) グラフ最適化問題に対する近似アルゴリズムの研究

研究課題名(英文) A Study of Approximation Algorithms for Graph Optimization Problems.

研究代表者

名古屋 孝幸 (Nagoya, Takayuki)

鳥取環境大学・人間形成教育センター・准教授

研究者番号：90349796

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円、(間接経費) 330,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、いくつかのグラフ最適化問題に対するアルゴリズムを検討した。手書き線画像から筆記運動を抽出する問題は、線画像をグラフとして表現することでグラフ上の最適化問題として定式化される。本研究では、この問題に対するスプラインを用いた発見的アルゴリズムを設計した。また、ある種の線画像に対応するグラフクラスを帰納的に定義し、そのグラフクラスに対する線形時間アルゴリズムを設計した。k-VRP(1,2)やMaxTSPに対しては、differential ratioにもとづく精度保証付き近似アルゴリズムについて検討した。

研究成果の概要(英文)：In this study, we proposed algorithms for some graph optimization problems. It is known that the problem to recover drawing order from static handwritten line images is modeled by a graph optimization problem. We designed a heuristic algorithm for this problem by using spline curve. Also, we recursively define a class of graphs those represent some line images. Then, we proposed a linear-time algorithm for the class. We also investigated differential approximation for k-VRP(1,2) and MaxTSP.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論 グラフ理論 組合せ最適化

## 1. 研究開始当初の背景

グラフ上の最適化問題として定式化される問題の多くはNP-困難であり、最適解を多項式時間で求めるアルゴリズムは存在しないであろうと予想されている。そこで、それらの問題に対して近似解を高速に求めるための近似アルゴリズムの研究が盛んになされている。

近似アルゴリズムは、発見的アルゴリズムと精度保証付き近似アルゴリズムの2つに分類することができる。発見的アルゴリズムは、局所探索や遺伝的アルゴリズムなどの発見的手法にもとづくものであり、その性能は実験的に評価される。すなわち、いくつかの入力例に対してプログラムを実行し、得られた結果によりそのアルゴリズムの性能を評価する。したがって、非常に悪い解を出力する可能性があるものの、多くの入力に対しては良い近似解が期待できる。そのため、より実用を意識した研究では発見的アルゴリズムが用いられることが多い。一方、精度保証付き近似アルゴリズムの性能は数学的に評価される。すなわち、論理的に考える全ての入力に対して、そのアルゴリズムが出力する最悪の場合を数学的に見積ることでそのアルゴリズムの性能を評価する。したがって、どのような入力に対してもある程度良い近似解が得られることが数学的に保証される。また、その問題の近似可能性の議論にもつながるため、計算量理論の分野において活発な研究がなされている。

精度保証付き近似アルゴリズムの性能を評価するためには、近似解の精度の評価方法を定める必要がある。近似解の精度の評価方法として最も広く利用されているのは standard ratio である。すなわち、入力に対する最適解のコストを  $opt$ 、近似解のコストを  $apx$  としたとき、近似率をそれらの比  $\max\{apx/opt, opt/apx\}$  で評価する方法である。Standard ratio は、近似アルゴリズムの精度保証として広く受け入れられているものである。しかしながら、最適解のコストと最悪の解のコストが近い入力に対しては、standard ratio は近似解の精度に何の保証も与えない。たとえば、最適解のコストと最悪の解の比が  $\epsilon$  である入力に対しては、 $\epsilon$ -近似アルゴリズムは最悪の解を出力する可能性がある。近似解の精度を評価するための別の指標として、differential ratio が提案されている。入力に対する最悪の解のコストを  $wor$  としたとき、differential ratio は  $(wor - apx) / (wor - opt)$  で定義される。すなわち、区間  $[opt, wor]$  (あるいは  $[wor, opt]$ ) における  $apx$  の相対的な位置により近似解の精度を評価する(図1)。よって、differential ratio を用いることで最適解のコストと最悪の解のコストが近い場合にも近似解の有意な精度を保証できる。2001年に R. Hassin らによって

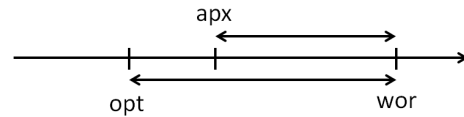


図1. differential ratio

differential ratio の正当性が主張され、それ以降、differential ratio に対する関心が高まっている。たとえば、グラフ彩色問題 (Duh et al., 1997)、ピンパッキング (Demange et al., 2001)、集合被覆問題 (Bazgan et al., 2005)、充足可能性問題 (Escoffier et al., 2007)、TSP (Monnot, 2002)、VRP (Bazgan et al., 2005, Nagoya, 2009) などの重要な最適化問題に対して、differential ratio にもとづく近似アルゴリズムが提案されている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、グラフ上の組合せ最適化問題に対するアルゴリズムを設計することである。具体的には、手書き線画像からの筆記運動抽出問題に対する発見的アルゴリズムの開発、および配送計画問題や巡回セールスマン問題等のグラフ最適化問題に対する differential ratio にもとづく精度保証付き近似アルゴリズムを設計することである。

(1) 静的な手書き線画像からその筆記運動を抽出する問題は、実用上の要請から多くの発見的アルゴリズムが提案されている。それらの多くは、交点付近の局所的な構造を用いてその交点における可能な筆順の妥当さを数値化し、それらを用いて線画像全体の最適な筆順を求めるものである。本研究では、より大域的な構造を反映した基準を用いることで、より精度の高い発見的アルゴリズムの開発を目指す。

(2) Optimal Euler Path Problem (OEP) は、D. Gusfield らにより導入されたグラフ最適化問題である (Disc. Appl. Math., 1998)。隣接する2つの辺の対  $(e_1, e_2)$  に対して重み  $w(e_1, e_2)$  が定められた準オイラーグラフが与えられたとき、オイラー道であり、かつそのオイラー道上の隣り合う2つの辺の対の重みの総和が最少となるものを求める問題である。この問題はNP-困難であることがD. Gusfield らによって証明された。上記(1)の問題は、手書き線画像を無向グラフとして表現することで、OEP に類似したグラフ最適化問題として定式化される。具体的には、各辺を少なくとも1回通るような道で、その道上の隣り合う2つの

辺の対の重みの総和が最少となるものを求める問題として定式化される。上記(1)で述べたように、この問題に対するアルゴリズムの多くは発見的手法にもとづくものであり、理論的な議論は皆無であるといつてよい。本研究では、計算量理論の側面からこの問題へのアプローチを試みる。

(3) NP-困難な組合せ最適化問題に対しては、standard ratio にもとづく近似アルゴリズムの研究が盛んになされている。一方で、differential ratio にもとづく近似アルゴリズムの結果は少ない。これは、differential ratio を評価するためには最適解に加えて最悪の解のコストも見積もる必要があり、近似率の解析が困難であることが理由の1つである。それゆえ、differential ratio の性質は良く分かっておらず、standard ratio と differential ratio の関係についても不明である。そのため、differential ratio にもとづく近似アルゴリズムの設計、特に、近似可能性に関する研究が数多くなされている VRP や TSP などの組合せ最適化問題に対して、standard ratio とリンクさせながら differential ratio にもとづく近似可能性を解析することは、これら2つの異なる指標の関係を解明し、differential ratio の性質を明らかにするためにも重要である。本研究では、VRP や TSP 等の代表的な最適化問題に対して、differential ratio にもとづく精度保証付き近似アルゴリズムの設計を試みる。

### 3. 研究の方法

(1) 筆記運動抽出問題に対する発見的アルゴリズムの多くは、各筆順の妥当さの基準として、各交点においてその筆順が連続して通る2辺の角度の総和を用いている。しかしながら、角度は非常に局所的な情報であるため、ノイズに弱いという性質がある。本研究ではより大域的な情報を用いることで、よりロバストなアルゴリズムを開発する。

(2) 研究の目的の(2)で述べた問題に対して最適解を多項式時間で求めるアルゴリズムは知られていない。また、多項式時間で最適解が求まる自明でないグラフクラスも知られていない。本研究では、入力グラフのクラスを制限し、そのグラフクラスに対するこの問題を解くための多項式時間アルゴリズムを設計する。

(3) 報告者は、各車両が配送できる顧客数の上限を  $k$  とした配送計画問題( $k$ -VRP)に対する differential ratio にもとづく近似アルゴリズムを設計した (Information Processing Letters, vol.109, 2009) .また、J. Monnot は、辺重みを 1 および 2 に制限した巡回セールスマン問題 (TSP(1,2)) に

対する differential ratio にもとづく近似アルゴリズムを設計した (European Journal of Operational Research vol. 145, 2003) . J. Monnot のアイデアを報告者が設計した  $k$ -VRP に対する近似アルゴリズムに応用することで、辺重みを 1 および 2 に制限した  $k$ -VRP に対する differential ratio にもとづくより精度の高い近似アルゴリズムを設計する。また、報告者は巡回セールスマン問題の最大化バージョン(MaxTSP)に対して、standard ratio にもとづく近似アルゴリズムを設計した (Journal of Combinatorial Optimization, vol. 13, 2007) . さらに、J. Monnot は MaxTSP に対する differential ratio にもとづく近似アルゴリズムを設計した。報告者の standard ratio にもとづく近似アルゴリズムのアイデアを J. Monnot のアルゴリズムに適用することで、より精度の高い differential ratio にもとづく近似アルゴリズムを設計する。

### 4. 研究成果

手書き線画像からの筆記運動抽出問題に対する発見的アルゴリズムを開発した。また、同問題に対して計算量理論にもとづく計算量の解析を行った。さらに、グラフに関する問題である制約付きグラフ同型性判定問題に関する研究成果を論文として公表した。 $k$ -VRP や MaxTSP に対する differential ratio にもとづく精度保証付き近似アルゴリズムについては、論文として公表するに値する成果は本研究期間内には得られなかった。

(1) 報告者が設計した筆記運動抽出問題に対する発見的アルゴリズム (Journal of Mobile Multimedia, vol.8, 2012) は、隣接する2つの辺の重みとして、それらに対応する線分の交点付近での角度を用いていた。本研究ではスプラインを用いたアルゴリズムを設計することで、より大域的な構造を反映した筆順を復元するアルゴリズムを設計した。この成果は、学会発表のにて発表した。

(2) 手書き線画像を表現するグラフクラスを帰納的に定義した。より正確には、基底となる10個のグラフ構造を定め、それらを  $S$ ,  $P$ ,  $U$ -composition と呼ばれる3つの合成規則を帰納的に用いて得られるグラフクラスを定義した。このグラフクラスは、double-traced line やそれらの入れ子構造を含む複雑な構造を持った線画像に対応する。線画像に対応するグラフクラスを正確に定めた研究成果はこれまで無かった。また、本研究ではこのグラフクラスに対する線形時間アルゴリズムを設計した。自明でないグラフクラスに対して最適解を求める多項式時間アルゴリズムを提案した研究成果もこれが初めてである。この成果は、学会発表の

にて発表した。

(3) 2つのグラフ  $G, H$ , および  $V(G) \times V(H)$  の部分集合  $R$  が与えられたとき,  $G$  から  $H$  への同型写像  $f$  で, 任意の  $(v, w) \in V(G) \times V(H)$  に対して  $f(v) = w$  となるものが存在するか否かを問う問題を, 制約付きグラフ同型性判定問題と呼ぶ。報告者は, 科学研究費補助金(課題番号 22700018)による研究にて, クリークサイズを制限した弦グラフに対する制約付きグラフ同型性判定問題を解くための多項式時間アルゴリズムを設計したが, この成果は本研究期間中に論文としてまとめ, 雑誌論文の で発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

名古屋孝幸, クリークサイズを制限した弦グラフに対する制約付きグラフ同型性判定アルゴリズム, 電子情報通信学会和文論文誌 D, 査読有, Vol. J95-D, No. 11, pp. 1889-1896, 2012.

[学会発表](計2件)

T. Nagoya and H. Fujioka, Recovering Human-like Drawing Order from Static Handwritten Images with Double-Traced Lines, 査読有, the 3rd International Conference on Intelligent Robotics, Automations, Telecommunication facilities, and applications, Fukuoka, Japan. Jul. 8-10, 2013.

T. Nagoya and H. Fujioka, Recovering Dynamic Stroke Information of Multi-Stroke Handwritten Characters with Complex Patterns, 査読有, the 2012 International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition, Bari, Italy, Sept. 18-20, 2012.

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

名古屋 孝幸 (NAGOYA, Takayuki)  
鳥取環境大学・人間形成教育センター・准教授  
研究者番号: 90349796

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

なし