

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24700017

研究課題名(和文)ストーン型双対性の保存について

研究課題名(英文)On preservation of Stone-type dualities

研究代表者

西澤 弘毅(NISHIZAWA, Koki)

神奈川大学・工学部・准教授

研究者番号：60455433

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、異なる多値論理の間でストーン型双対性が保存されるための条件を明らかにすることを目的とした。成果として、半束の圏と完備束の圏の間の随伴から、T代数上の半束の圏とT代数上の完備束の圏の間の随伴を与える構成を与えた。また、積の単位元を恒等関係で表現でき、順序を包含関係で表現できるような、クウォンテールの関係表現定理を示した。その類似例として、完備べき等左半環を二項多重関係で表現する表現定理も示した。最後に、多重関係と多値関係の一般化として、多値多重関係という概念を定義した。

研究成果の概要(英文)：Our goal is to give the sufficient condition for preservation of Stone-type dualities among different multi-valued logics. As a result, we gave the construction of the adjunction between the category of join semilattices over T-algebras and the category of complete join semilattices over T-algebras, by using the adjunction between the category of join semilattices and the category of complete join semilattices. We proved the relational representation theorem of quantales whose order and monoid structure are respectively given by inclusion and relational composition and the identity relation. As a similar example, we provided the multirelational representation theorem of complete idempotent left semirings. Finally, we defined the notion of multi-valued multirelations as a generalization of multirelations and multi-valued relations.

研究分野：情報科学

キーワード：情報科学 ストーン型双対性 多値論理 多重関係 表現定理

## 1. 研究開始当初の背景

数理論理学では、人間の推論を形式化したものを論理と呼ぶ。論理を与える際に求められることは、真であると推論できる命題が必ず意味的にも正しいこと(健全性)であるが、それに加えて、意味的に正しい命題をすべて証明できること(完全性)については満たす論理とそうでない論理がある。例えば命題論理は健全性と完全性を両方満たす。その完全性の証明の鍵となるのは、異なる論理式を異なる部分空間に対応させるための、十分多くの数の点を持つ空間が存在するという事実(ストーンの表現定理)である。

さらに、ストーンの表現定理を出発点として、命題論理と空間の間の深い関係が明らかになっている。命題論理と同様の規則を満たす代数系(ブール代数と呼ばれる)と、ストーン位相という位相構造の入っている空間は、完全に一対一に対応することが証明されている。つまり、ストーン位相の入っているどんな空間に関する命題も、その空間の点に直接言及することなく推論が可能になり、逆に、命題論理と同様の構造を持つどんな代数系も、空間として具体的に捉えることが可能になる。このような空間と代数系の間の一対一対応は、空間を理解するにも代数系を理解するにも有効な性質である。同様の性質はさまざまな空間と代数系に対して見つかり、それらはストーン型双対性と呼ばれている。

## 2. 研究の目的

ストーン型双対性を証明するためには、代数に対応する点や空間を具体的に与える必要がある。そのため、さまざまな代数系や空間に対して、その間にストーン型双対性が成り立つかどうかを証明するには発見的な難しさがある。そこで最近の研究は、論理を拡張した場合に、元のストーン型双対性から拡張後のストーン型双対性を構成できるかどうかに関するものが多い。その方向には大きく分けて以下の二つがある。

### (1) 論理の多値化

上で挙げた命題論理や命題様相論理では、扱える真偽値は「真」「偽」の2値だけであるが、論理学の分野ではいろいろな真偽値を扱うための研究が進められている。例えば、「真」「偽」「矛盾」「未確定」の4値、「0」「0.5」「1」の3値、0から1までの任意の実数を真偽値とするファジー論理などである。丸山は、2値論理をどのように多値論理化する場合にストーン型双対性の存在が保

たれるのかを明らかにした。例えば、有限分配束を真偽値に用いて多値化した場合にストーン型双対性が保たれることが明らかになった。

### (2) 論理記号の追加

Kurz らは、モナド(monad)と呼ばれる概念を用いて、どのように論理記号を追加する場合にストーン型双対性の存在が保たれるのかを明らかにした。例えば、命題論理に「 $\sim$ 」であることが必然的」などと解釈できる様相記号を付け加えた論理は命題様相論理と呼ばれ、これと同様の規則を満たす代数系は様相代数と呼ばれている。一方、ストーン位相空間を拡張した空間として叙述的一般フレームが知られている。Kurz らの理論により、ブール代数の圏とストーン位相空間の圏の間のストーン型双対性を基にして、様相代数の圏と叙述的一般フレームの圏の間のストーン型双対性を証明できることが明らかになった。

しかし、4値から3値への置き換えなど、異なる多値論理の間でストーン型双対性が保たれるかどうかの研究はほとんど行われていない。そこで本研究では、異なる多値論理の間でストーン型双対性が保存されるための条件を明らかにする。

## 3. 研究の方法

以下の手順で研究を行う。

### (1) 既知のストーン型双対性の調査

すでに知られているさまざまなストーン型双対性の文献調査等を行う。特に様相論理にかかわる複数の代数と複数のフレームについて関係を明らかにする。

### (2) 一つの随伴から別の随伴を導く構成の一般化

一つのストーン型双対性から別のストーン型双対性を導く構成を与えるという最終目的の前段階として、一つの随伴から別の随伴を導く構成を明らかにする。そもそも双対性は、以下の3種類の関係のうち最も強い関係として整理できる。

忠実左随伴を持つ双対随伴

充滿忠実左随伴を持つ双対随伴

充滿忠実左随伴と充滿忠実右随伴を

持つ双対随伴(すなわち双対性)

このうち双対性が得られずやしか構成できないような圏もありうるが、それでも結果はある程度有効である。例えば、2値命題論理の完全性を示すには、忠実左随伴を持つ双対随伴だけあれば十分である。

上記の考察に基づき、まずは一つの随伴から別の随伴を導く構成を明らかにする。その際、構成を一般化するために、モナド間の分配則の利用を試みる。

### (3) 表現定理の証明

前節で記した「忠実左随伴を持つ双対随伴」の例の中には、表現定理と呼ばれるものもある。これは、忠実左随伴を持つ双対随伴さえあれば、代数という抽象的な規則でしかない体系の任意の例を、なんらかの空間で具体的に表現することができることを意味するからである。

したがって、ストーン型双対性の新しい構成を見つけるためには、新しい表現定理を見つけることが必須である。

### (4) 多重関係と多値関係の融合

本研究では、論理として複数の多値論理などを比較することを目的としている。一方、空間の側においては、多値に似た概念として多重という概念がある。様相論理の標準的なモデルは二値関係(2-valued relation)だが、その発展形としてはクウォンテールを基にした多値関係(multi-valued relation)と多重関係(2-valued multirelation)の二通りがあるのである。したがってこれらの共存を許す一般的な体系を考えるとしたら、多値多重関係(multi-valued multirelation)とも呼ぶべき包含的な概念を新たに構築する必要がある。

### (5) 多様なストーン型双対性の一般的構成

上記の(1)から(4)を踏まえて、多値関係や多重関係を含む様々なストーン型双対性を一般的に構成する方法を定式化する。

## 4. 研究成果

前節の(1)から(5)の項目に沿って成果を報告する。

### (1) 既知のストーン型双対性の調査

「2. 研究の目的」の(2)で述べたとおり、ブール代数の圏とストーン位相空間の圏の間のストーン型双対性を基にして、様相代数の圏と叙述的一般フレームの圏の間のストーン型双対性を証明できることがすでに知られている。

一方、様相論理の典型的な意味論はクリプキフレームで与えられるが、これは上記の叙述的一般フレームとは微妙に異なる概念である。このクリプキフレームの圏との間で双対性を持つのは、完備分配様相代数の圏だということが知られていることが分かった。また、完備分配様相代数とブール代数の間には、

完備アトミック様相代数と完備アトミックブール代数という代数があるが、後者は集合の圏との間に双対性があることが知られている。前者の完備アトミック様相代数は、完備アトミックブール代数と様相代数のプルバックであるから、双対性を持つ相手は集合と叙述的一般フレームのプルバックということになる。

### (2) 一つの随伴から別の随伴を導く構成の一般化

半束の圏と完備束の圏の間の随伴はイデアル完備化と呼ばれる構成で得られることが知られている。一方、イデアル完備化によく似た構成は他にも知られており、べき等半環の圏とクウォンテールの圏の間の随伴や、\*-連続クリーニ代数の圏と閉半環の圏の間の随伴などが知られている。本研究では、半束の圏と完備束の圏の間の随伴から、べき等半環の圏とクウォンテールの圏の間の随伴を構成する手法を定式化した。さらにそれを一般化し、 $T$ 代数上の半束の圏と $T$ 代数上の完備束の圏の間の随伴を与える構成も与えた。この一般的構成の例として、\*-連続クリーニ代数の圏と閉半環の圏の間の随伴が含まれるかどうかは不明である。

### (3) 表現定理の証明

前述のクリプキフレームや叙述的一般フレームは、二項関係の発展形である。その二項関係に深くかかわる新しい表現定理として、積の単位元を恒等関係で表現でき、順序を包含関係で表現できるような、クウォンテールの関係表現定理を示した。また、その類似例として、完備べき等左半環を二項多重関係で表現する表現定理も示した。

### (4) 多重関係と多値関係の融合

多重関係と、クウォンテールを基にした多値関係の共存を許す一般的な概念として、多値多重関係という概念を定義した。これは継続モナドのクライスリ射と言い換えることもできる。多値多重関係の例には、通常二項関係、多値関係、多重関係の他に、多重関係の特定のクラス(たとえば上に閉じた多重関係のクラス、など)も含まれる。

これにより多様な論理の間の比較をする基盤を構築できたとと言える。

「(5) 多様なストーン型双対性の一般的構成」については成果はまだ得られていないが、(1)から(4)の成果を統合しつつ引き続き取り組んでいくこととする。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

Hitoshi Furusawa, Koki Nishizawa,  
Multirelational representation theorems  
for complete idempotent left semirings,  
Journal of Logical and Algebraic Methods  
in Programming, 査読有、Volume 84 (3)、  
2015、pp.426-439  
doi:10.1016/j.jlamp.2014.08.008

Koki Nishizawa and Hitoshi Furusawa,  
A Sufficient Condition for Lifiable  
Adjunctions between Eilenberg-Moore  
Categories, Lecture Notes in Computer  
Science, 査読有、Vol.8428、2014、pp.261-  
276  
doi:10.1007/978-3-319-06251-8\_16

Koki Nishizawa, Hitoshi Furusawa,  
Relational Representation Theorem for  
Powerset Quantales, Lecture Notes in  
Computer Science, 査読有、Vol.7560、2012、  
pp. 207-218  
doi: 10.1007/978-3-642-33314-9\_14

〔学会発表〕(計 5 件)

西澤弘毅, Multi-valued multirelations,  
理論計算機科学と圏論ワークショップ、2016  
年 3 月 16 日、理化学研究所計算科学研究機  
構(兵庫県・神戸市)

西澤弘毅, A Sufficient Condition for  
Lifiable Adjunctions between  
Eilenberg-Moore Categories, 理論計算機科  
学と圏論ワークショップ、2014年3月18日、  
神奈川大学湘南ひらつかキャンパス(神奈川  
県・平塚市)

西澤弘毅, Ideal Completion of Join  
Semilattice over T-algebra, 数学の形式化  
に関する研究集会、2013年3月8日、アクロ  
ス福岡(福岡県・福岡市)

西澤弘毅, Weak split fork について、  
代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会、2012  
年 9 月 7 日、九州工業大学情報工学部(福岡  
県・飯塚市)

西澤弘毅, Ideal Completion of Join  
Semilattice over T-algebra, 理論計算機科  
学と圏論ワークショップ、2012年3月13日、  
慶應義塾大学日吉キャンパス(神奈川県・横  
浜市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等

なし

6. 研究組織  
(1)研究代表者

西澤 弘毅(NISHIZAWA, Koki)  
神奈川大学・工学部・准教授  
研究者番号: 60455433

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし