

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 29 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24700869

研究課題名(和文)「読む活動」を重視した数学的表現力育成プログラムの開発と評価

研究課題名(英文) Development and Evaluation of Programs to Encourage Students' Ability on Mathematical Linguistics Expression Skills

研究代表者

御園 真史 (MISONO, Tadashi)

島根大学・教育学部・准教授

研究者番号：60467040

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では「かく」といった表現活動の前に、「読む」活動を重視することの必要性に着目する。そのための基礎調査として、学習者がつまづきそうな数学的記述表現は何かを明らかにし、それらの表現を学習者がどのように理解しているのかを明らかにした。

数学科教科書に現れる数学的表現を抽出し、集計を行った結果、数学用語および日常語であるが、数学の文脈で使うと特別な意味で用いられる語が占める割合が半分以上であり、理解を妨げる要因になっていることが分かった。これを踏まえ、数学的言語力調査問題の開発し、ある高等学校において実施し、分析を行った結果を踏まえ、数学的言語力向上プログラムを実施した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to develop and evaluation of programs to encourage students' ability on mathematical expression skills. To attain the aim, we must know important mathematical representations which we should teach. Therefore, we analyzed mathematics textbook in Japan. As the result, many expressions in textbooks are not usual language for students. It suggests that there were a big difference in expressions used in mathematics and in students' daily life. Based on the analysis, students' ability of reading mathematical expression was consulted. Based on the result, the programs to encourage students' ability on mathematical expression skills were planned and practiced.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的表現力 数学的言語力 数学教育 記述表現 読解力 教科書分析

1. 研究開始当初の背景

近年、思考力や判断力に加えて、数学的な表現力の育成も重視されてきており、特に、平成 20 年に公示された新学習指導要領においては、数学科の目標として「数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高める」(文部科学省 2008) などのように、従前の学習指導要領に比べ、表現力に関わる記述が多く追加されるようになった。しかし、数学的な表現力育成に関する研究はまだ発展途上で、十分な知見が得られているとは言い難い。したがって、教育現場でどのように指導をしていけばよいのかという課題に対しては、教員の経験によるところが大きいのが現状である。

ここで、数学的な表現力とはどのようなものかを考察していく。小島(2008)は「言葉や数、式、図、表、グラフなどを用いて、問題の解決過程における考え方や処理の仕方、結果をわかりやすく表したり、説明したりする能力」と説明している。また、松元(2009)は、数学的な表現力を「かく力」、「読む力」、「伝える力」の3つに分類することを提案している。以上を踏まえた具体的な授業での指導提案として、数学的な表現力を育成する授業モデルとして、「多様な解法を、数学的な表現を用いて説明し、伝え合う授業」や「問題づくりや作問を通して、つくった問題を説明し、解き合う授業」など4つの授業の型を提案している。

これらの指導提案では、コミュニケーションを主体とした活動を通して、数学的な表現の仕方を学ぶものであり、充実した学習活動になりうる。しかし、コミュニケーションを通じた指導は、「望ましい数学的表現を身につけよう」という意識が学習者自身にあるこそ数学的表現力がつくと考えられる。

筆者が国際学力調査 TIMSS の分析から明らかにしたことであるが、言葉による説明を必要とする記述問題に部分正解や完全正解できる受験者は、知識・技能で答えられる問題で高得点者に限られるが、逆に、知識・技能で答えられる問題で高得点だからといって、必ずしも言葉による説明を必要とする記述問題に正解できるとは限らないことが明らかとなった(御園 2011)。つまり、知識・技能が十分身につけていても、必ずしも数学的な表現ができるとはいえないのである。すなわち、数学的表現力は、数学的な知識の量や、計算や問題解決などの技能の能力と同様に、単純に経験を積むことによって伸ばすことは難しいことが示唆される。

したがって、数学的な表現力を向上させるためには、何らかの意図的な指導が必要である。表現力の育成がうまくいかない原因はいくつか考えられるが、数学で扱われることばや言い回しは独特であることが多く、日常生活で使う意味や機能とは異なる場合がある。これらの諸問題について、1960年代に戸田清を中心とするグループが研究を重ねてお

り、飯田ら(1965)も「表記に使われている文字が難かしいとか、日常生活にあまり関係のない意味をもった文字や、文語体から口語体に移ってはいるけれども、文語体のなごりが残っている」(p.29)と指摘している。このような問題から、数学的な表現の送り手と受け手でその解釈などにズレが生じている可能性が考えられる。

つまり、数学における言語表現は、日常で扱う言語表現とは異なるものもあり、学習者自身がそのような数学的言語表現の意味を意識的に理解していかなければ、数学的な言語表現をしようにも、表現するための手段が身に付いていないため、結果として表現できない可能性があると考えられる。

近年、特に算数・数学の「読む活動」が軽視されていることが挙げられる。例えば、算数・数学科の教科書には、多くの数学的な表現が現れている。しかし、日本においては学校教員が優秀であり、教員の説明はわかりやすい。これにより教科書を読む必要はなく、その結果、教科書の記述について、教師が細かくその意図などを解説する機会は少ないと考えられる。したがって、学習者が教科書執筆者の意図をどの程度受け入れ、自らの知識構造に組み入れたり、数学的に思考したりしているのかは明らかでない。また、文章ベースで読まないことから、せっかくの適切な数学的な表現力を身につける機会を逃しているとも考えられる。

(参考文献)

- 文部科学省(2008) 中学校学習指導要領解説 数学編, 教育出版。
 小島宏(2008) 算数科の思考力・表現力・活用力—新しい学習指導要領の実現—, 文溪堂。
 松元新一郎(2009) 中学校数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル, 明治図書。
 御園真史(2011) 数学的な知識・技能の力と数学的な言語力の関係, 日本数学教育学会 第44回数学教育論文発表会論文集, 1107-1108。
 飯田正宣・平林一栄・富田昇(1965) 数学の表記について(表記に関する調査研究委員会の中間報告), 日本数学教育会誌, 47(1), 29-32。

2. 研究の目的

以上を踏まえ、本研究では、意識的に「読み」を行い、その記述の意味を学習者が十分に吟味することを重視した指導するプログラムの開発とその効果検証を目指す。そのための基礎調査として、学習者がつまづきそうな数学的記述表現は何かを明らかにすることと、それらの表現を学習者がどのように理解しているのかを明らかにする。

3. 研究の方法

数学的表現力の指導を考えるのにあたり、

短時間で最大限の効果を上げるため、まずは、数学科教科書の記述に現れる数学的記述表現に焦点化して、重要なものを優先して扱うことが必要と考えた。

そこで、まず、指導すべき数学的記述表現を対象とし、教科書での出現頻度の高いものや、教科書の記述の意図を分析し、その中で誤解を生じやすそうなもの、解釈が難しそうなものなどの観点から、数学的記述表現を抽出した。それを受け、抽出された数学的記述表現を踏まえ、それらの意味理解を問うことの出きる調査問題を作成し、学校現場（高等学校）に調査をお願いし、調査結果の集計・分析を行った。また、その調査結果を受けて、数学的記述表現力育成のためのプログラムを構想し、実施した。

これら一連の研究成果を、学会発表等で順次実施した。また、今後の展開を想定し、研究室の Web ページにて、これまでの研究の経緯を説明し、学校現場への普及と研究の発展を目的とした内容を掲載し、周知に努めた。

4. 研究成果

(1) 教科書における数学的記述表現の分析

中学校数学科の教科書に現れる数学的記述表現にはどのような機能があるのかを分析した。対象の教科書は 2012 年に発行された新興出版社啓林館の中学校 1 年生のものであり、最初の単元「正負の数」の最初の 11 ページを対象とした。

教科書の中には、数学的な内容の説明のほかに、とびら、問いや例、例題とその解答、章末問題、発展的な内容、学習した内容を踏まえての研究課題等、様々な内容が盛り込まれているが、ここでいう本文とは、これらの要素を除いた、数学的な内容の説明を行っている地の文のみを指している。

分析にあたっては、まず、教科書を電子的なデータとして文字起こしを行った。これらの文書データを形態素解析ソフトである MeCab を利用して、形態素解析（品詞の分解）を行った。その際、一般の辞書のままだと、例えば、「数直線」が「数」と「直線」に分割されてしまう可能性がある。そこで、あらかじめ、この単元に現れる数学的な用語については辞書を作成し対処した。この「数直線」は数学で使われる専門用語と考えられるので、「数学用語」として分類することとした。

MeCab 用の独自の辞書の作成は、もう一つの重要な意味をもつ。それは、数学で使われる「ことば」は複数の単語の組み合わせで独特の数学的表現を構成する場合があり、それを抽出する必要があるからである。例えば、「いつでも」という表現は、「いつ」と「でも」という名詞と助詞に分解される。この表現は、教科書の記述では、「 a , b が自然数のとき $a+b$, $a \times b$ の答えは、いつでも自然数です」（岡本和夫ら, 2012）のように登場し、「どんな場合でも常に」という意味で用いら

れている表現であると考えられる。この「いつでも」を「いつ」、「でも」と品詞ごとに細かく分類しすぎると、その表現のもつ意味合いが分かりにくくなってしまう。そこで、この「いつでも」という語をひとまとめにして、「任意条件」と分類することにした。このようにいくつかの単語が複合された語も独自の辞書の中に含めている。

さらに、教科書の文章の機能分類を効率化するため、既に MeCab に登録されている単語であっても、数学の文脈で特別な意味や機能を持つ語は、その意味および機能を抽出するために、改めて登録をし直している。例えば、「求める」という意味の動詞は、数学では、式の計算などを行い、その結果に至るまで思考を進めるという意味で用いていると考えられるので「解決や結論に向けた思考・処理」と分類することとした。

なお、MeCab は、動詞や形容詞などの活用する語は、活用形をすべて登録することになっているので、この数値の中には、同一の基本形でありながら活用展開したものも含まれている。例えば、「求める」だけでも終止形のほか、「求め」（未然形）、「求めよ」（未然形）、「求め」（連用形）、「求めれ」（假定形）、「求めよ」（命令形）、「求めろ」（命令形）、「求めりゃ」（假定縮約）、「求めん」（体言接続特殊）の 9 単語を登録している。

以上のような事情から、展開語もそれぞれカウントして、350 以上の表現を辞書に登録している。

このような形態素解析を経た後、著者により、意味の再確認を行い、機能を最終決定した。以上のような手続きを経て得られた機能分類の結果の一例を以下に示す。

機能	表現例
数学記号	-(マイナス)
数	0, 1/2
数式	5+(-6)
比較対象	より
関係	小さい
同等	同じ
位置関係	(直線)上
移動	進む
範囲	以上, 以下
数学用語	数
単位	℃
数学記号の読み	マイナス
表現	示す
存在	ある
定義	いい
具体例からの概念説明	よう
参照による説明	よう
否定	でもない
条件・場合	とき

既習事項示唆	これまでは
再定義示唆	これからは
例示	例えば
思考一般	考える
仮定的思考	考える
演繹的帰結	成り立つ
妥当的帰結	と考えられます
任意条件	いつでも
非限定	限らない
可能	できます
不可能	できません
見方	とみることができます
適合	あてはまる
表現中の記号等の存在・付加	つく
一般化・拡張的な思考	考える、ふくめる
一般化・拡張的操作	のぼす
状況に応じた処理の説明	ことがある
設定	決める
機械的操作	とりかえる
思考の対象	について
操作の対象	に対して
対照的な概念	に対して
結論・まとめ	である
解決や結論に向けた思考・処理	求める
同様な思考・処理	同様
状態	なっている
結果	なる
文字式的記号	○, △
概念・判断の軸	大小
数量の幅	だけ
根拠・理由	ので
記号・式・概念・考え方などの利用	使う
方向・向き	反対
自由度をもった指定	ある
物理的な量	気温, 高さ, 深さ
状態・性質等の質問	どんな
学習目標提示	学びましょう
既習事項確認	学びました
和集合	か, または

今回の抽出作業だけでも、約 70 種類もの多様な表現が抽出された。つまり、数学を学習していくには、これだけの意味を把握する必要があるということである。現状では、それらの言葉の指導が十分でない可能性があり、どのように指導をしていくかが重要な課題であると考えられる。

次に、教科書の本文に現れる言葉を、「数学用語または数学で定義される用語」（例、

正の数、負の数など）、「日常語であるが、数学の文脈で使うと特別な意味で用いられる語」（例、大きさ、いつでも等）、「日常で用いられる語」の 3 つに分類した。この結果が以下の表である。

この結果、「数学用語または数学で定義される用語」、「日常語であるが、数学の文脈で使うと特別な意味で用いられる語」が 6 割弱であり、これらの意味をきちんと押さえられなければ、そもそも説明自体がわからないことが起きることが容易に想像できる。

分類	頻度	割合
数学用語または数学で定義される用語	341	27.0%
日常語であるが、数学の文脈で使うと特別な意味で用いられる語	390	30.9%
日常で用いられる語	533	42.2%
TOTAL	1264	100.0%

(2) 数学的記述表現の解釈に関する調査問題の実施結果

本調査では、(1)の成果を踏まえ、中学校および高等学校数学 I の教科書に現れる程度の数学的な記述表現をどの程度適切に解釈しているかを問う調査問題を開発し、S 県のある高等学校の第 1 学年の生徒 321 名（1 学年全体）を対象に、2014 年 4 月に実施した。

この結果、表現の中でどれが定義であるかが判断できない可能性があること、教師が当たり前のように使うことばの意味が学習者に共有されていない可能性があること、証明の論理を丹念に追っていくことに課題があることなどの問題点が示唆された。以下では、これらをより詳しく述べる。

まず、定義の読み取りの問題では、与えられた文章中に下線が 4 箇所引かれており、その中から逆数の定義を表す箇所を選択する問題を出題した。

1 次の文章を読んで、あとの問いに答えなさい。

① 2 つの数の積が 1 のとき、一方の数を他方の数の逆数という。

例 3 の逆数は $\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{4}$ の逆数は $-\frac{4}{3}$

② _____

このように③ 正負の数の逆数は、その数の絶対値の逆数にもとの符号をつけた数である。

④ 0 とどんな数との積も 0 となり、1 にはならないから、0 の逆数はない。

[問] 下線部①～④のうち、逆数の定義を表しているのはどれですか。

選択肢①「2 つの数の積が 1 のとき、一方の数を他方の数の逆数という」が、逆数の「定

義」を表している箇所である。選択肢②は、定義に基づく逆数の「具体例」である。また、選択肢③は、選択肢②の逆数の例を受けて、特に負の数の場合の「逆数の求め方」を説明している箇所である。選択肢④は、定義に基づいて推論することにより「0の逆数は存在しないことの説明」をしている箇所である。以下に、各選択肢の選択率を示す。

選択肢	①正解	②	③	④
選択率	43.8%	26.9%	18.8%	10.6%

この結果、正解である選択肢①を選んだ調査協力者は43.8%にとどまった。また、定義に基づく例を定義だと考える調査協力者が26.9%と約4分の1を占めることがわかった。また、選択肢③の「逆数の求め方」を選択している調査協力者も18.8%と2割弱であった。このように、数学的な内容を理解する際に、どこが「定義」であるかという意識は十分でないことがうかがえる。

以下は、「とくに」という表現の意味理解を問う問題である。

3 次の文章を読んで、あとの問いに答えなさい。

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。
とくに、半円の弧に対する円周角は直角である。

[問] 下線部の「とくに」の意味として最も適切なのは次のどれですか。①～④の中から1つ選びマークしなさい。

- ① 「半円の弧に対する円周角は直角である」がとくに重要であるので覚えておく必要があるということ。
- ② 「半円の弧に対する円周角は直角である」がいろいろな場面で用いられるので注意しなければならないということ。
- ③ 「半円の弧に対する円周角は直角である」は、その前に述べられている「円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である」ということが、さらにいろいろな場合にも成り立つ内容であるということ。
- ④ 「半円の弧に対する円周角は直角である」は、その前に述べられている「円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である」の限定された場合について考えているということ。

この問題で用いられている「とくに」は、「半円の弧に対する円周角は直角である」は、「円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である」において、中心角が90°であるような特別な場合であることを示しており、選択肢でいうと④が適切である。

以下に、各選択肢の選択率を示す。

選択肢	①	②	③	④正解
-----	---	---	---	-----

選択率 17.2% 11.6% 17.8% 53.4%

正解した調査協力者は53.4%と5割強であった。正解しなかった調査協力者が選んだ選択肢は①、②、③に分散した形となった。ここで、「とくに」の意味を、選択肢①のように「とくに重要」を選んだ調査協力者が2割弱いた。

「とくに」は、数学的な考え方では「特殊化」や、さらにその反対の意味である「一般化」という論理関係を表す重要な表現であると考えられ、数学ではよく用いられる表現である。したがって、教師は、「とくに」のような語がどのような役割をもち用いられるのかを意識して指導する必要があると考えられる。

以下は、中学校で既習の平方根の積に関する証明の論理展開を読み取る問題である。

10 $a > 0, b > 0$ のとき $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ が成り立ちます。次の文章は、このことの証明です。これを読んで、あとの問いに答えなさい。

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ を2乗すると

$$A (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$$

また、 $B \sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0$ であるから

$$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$$

よって、 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の である。
すなわち、

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

- (1) 下線部Aで、 $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2$ と変形していますが、これはどの指数法則を用いていますか。①～③の中から1つ選びマークしなさい。ただし、 m, n は正の整数とします。
 - ① $x^m x^n = x^{m+n}$
 - ② $(x^m)^n = x^{mn}$
 - ③ $(xy)^n = x^n y^n$
- (2) 下線部Bが成り立つことの根拠として最も適切なのは次のどれですか。①～④の中から1つ選びマークしなさい。
 - ① $a > 0$ という条件が与えられているから
 - ② 正の数 a の正の平方根を \sqrt{a} で表すという定義から
 - ③ 実数を2乗すると0以上の数になるという性質から
 - ④ $(\sqrt{a})^2 = a$ が成り立つから
- (3) 文中の にあてはまる最も適切な語句を書きなさい。

(2)では、下線部Bが言える根拠についての理解を問うものである。本問の正答率は17.9%と低かった。

選択肢 ① ②正解 ③ ④

選択率 63.0% 17.9% 10.3% 8.8%

(3)では、「正の平方根」と答えるのが適切であるが、正答率はわずか10%にすぎなかった。約7割は単に「平方根」のみ記述していて、丹念に証明の論理を追っていくことに課題があることがわかった。

(3) 数学的記述表現力を育成するプログラムの実施

(2)で実施した数学的記述表現の解釈に関する調査問題の実施結果を踏まえ、特に問題のあった箇所を中心に指導を、調査対象となった高校生のうち、1クラスを対象に2014年5月に実施した。その内容は、基本的には、(2)で実施した数学的記述表現で述べた問題点について、どういう意味で記述されているのかを解説する形で行った。また、現場の先生方にも参観していただき、それを他のクラスにも展開していただいた。これにより、教員研修機能もあわせもつことができた。

(4) 今後の課題

以上の研究成果を踏まえた論文としての公表は科学研究費の助成期間は終了しているが、鋭意進めているところである。さらに、発展的に、中学校での数学的文章（特に文字式を用いた説明や図形の証明等）の「読む」指導について、松江市内の中学校の教員と検討を行っており、それを実施し、その効果を検証していく必要がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[論文] (計1件)

1. 御園真史 (2015) これからのリメディアル教育とその研究のあり方：数学の例を中心に、リメディアル教育研究, 10(1), 60-61, 査読なし

[学会発表] (計11件)

1. 御園真史 (2015) 数学的言語力調査の結果からみるリメディアル教育における言語面の指導の必要性, 日本リメディアル教育学会第7回関西支部大会, 4-5, 2015年3月23日, 関西外国語大学(大阪府).
2. 御園真史・足立将太 (2014) 教科書に書かれている数学的概念と生徒の保持する概念の剥離に関する一考察, 日本数学教育学会第47回秋期研究大会発表集録, 529, 2014年11月8日, 熊本大学(熊本県).
3. 御園真史 (2014) 高校生を対象とした数学的表現の理解に関する一考察, 日本数学教育学会第47回秋期研究大会発表集録, 365-366, 2014年11月9日, 熊本大学(熊本県).
4. 御園真史 (2013) 数学教職科目履修生の

数学的言語力についての調査, 日本リメディアル教育学会第3回関東甲信越支部研究会発表予稿集, 30-31, 2013年12月7日, 日本橋学館大学(千葉県).

5. 御園真史 (2013) 方程式の利用の指導における問題点と改善案-文字式および関数の指導との関連に着目して-, 日本数学教育学会第46回秋期研究大会発表集録, 205-208, 2013年11月16日, 宇都宮大学(栃木県).
6. 御園真史 (2013) 中学校第1学年数学科教科書に現れる語彙の機能分類, 日本教育工学会第29回全国大会講演論文集, 335-336, 2013年9月21日. 秋田大学(秋田県).
7. T. Misono (2013) An Analysis of Functions of Expressions in an Authorized 7th Grade Mathematics Textbook in Japan, *7th Annual International Conference on Mathematics Education & Statistics Education*, The Athens Institute for Education and Research, 2013年6月18日, Athens (Greece).
8. T. Misono (2013) An Analysis of Expressions in a Japanese Authorized Mathematics Textbook, *EARCOME6, EARCOME6 Proceedings*, Vol.1 p.260, 2013年3月20日, Phuket (Thailand).
9. 御園真史 (2012) ある数学科教科書に使われることばの機能に関する一考察, 日本教育工学会研究報告集 JSET 12-5, 199-202, 2012年12月15日, 東京学芸大学(東京都).
10. 御園真史 (2012) 中学校数学科教科書に現れる数学的表現の一分析, 2012年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 54-56, 2012年9月19日, 九州大学(福岡県).
11. T. Misono & K. Takeda (2012) An Investigation of the Mathematical Writing Abilities of Students in a Public Elementary School in Japan, *12th International Congress on Mathematical Education, ICME-12 Pre-proceedings*, 5917-5926, 2012年7月10日, Seoul (Korea)

[その他]

本研究で行った調査等については、研究室web ページ <http://misono-lab.info/> でも随時情報公開を行う

6. 研究組織

(1) 研究代表者

御園 真史 (Tadashi MISONO)
島根大学・教育学部・准教授
研究者番号：60467040