

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2013

課題番号：24730722

研究課題名(和文) 中学校数学で「未完成な証明」を生成する生徒の推論過程を改善する教授方略の研究

研究課題名(英文) A Study of Teaching Strategy Improving Reasoning of the Students that Produce "Incomplete Proof" at Junior High School Level

研究代表者

牧野 智彦 (MAKINO, TOMOHIKO)

宇都宮大学・教育学部・准教授

研究者番号：10450157

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、中学校数学の証明問題の解決場面で「未完成な証明」を生成する中学生の「架橋過程」での認知的要因と思考を同定し、それに基づいて中学生の「架橋過程」を促進する教授上の視点を見出すことであった。「未完成な証明」を生成した認知的要因を分析するために、「仮説的架橋」と「調整」という観点から成る分析枠組みを構築し、インタビュー調査を実施して得たデータを分析した。その結果、「未完成な証明」を生成する中学生の認知的特徴を同定し、「未完成な証明」を生成した生徒への教授上の視点を示唆した。

研究成果の概要(英文)：This study aims to identify cognitive factor and thinking in "bridging process" performed by the students that produce "incomplete proof" in solving the proof-problem of junior high school mathematics and to find instructional points fostering students' "bridging process". This study constructed the framework that consists of two poles as "hypothetical bridging" and "coordination" and analyzed data gathered through interview survey.

As a result, this study identified cognitive characteristics of the students that produce "incomplete proof" and suggested instructional procedures that could improve student's proving performance.

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学，教科教育学

キーワード：各教科の教育(算数・数学)

1. 研究開始当初の背景

(1) 「未完成的な証明」への着目と教授方略の開発の必要性

学校数学で証明を学習することは、数学の創造と活用という数学的観点と、物事的前提や根拠を明らかにする、筋道立てて説明する、そして論理的に考える等の教育的観点から重要である。しかし、近年の全国規模の各種調査で、証明に関する中学生の学習状況が望ましくないことが報告されている〔国立教育政策研究所教育課程研究センター、2003、2006；文部科学省・国立教育政策研究所、2008、2009〕。

本研究では、途中で止まっている解答、最後まで証明を記述しているが推論に誤りや飛躍がある解答、条件だけ記述している解答等々、証明の記述が途中段階にある「未完成的な証明」を生成している中学生に焦点を当てる。その理由としては、全国規模の各調査の結果によると、「未完成的な証明」を生成している生徒は約40%であり、無解答率30%よりも割合が大きいからである。また、学習意欲の向上の視点から、「あと一步」のところまで来ている生徒の努力を結実させたいからである。さらには、「未完成的な証明」を生成している中学生に、成功体験を継続的に与えることができれば、生徒は自信を持ち、ひいては我が国の証明学習の改善へと繋がると思われるからである。

ところが、多くの教師は「未完成的な証明」の存在を認めているにもかかわらず、改善のための効果的な手立てがないため、経験的、直観的な判断に基づいて、試行錯誤的に教育実践を行っているのが現状である。すなわち、今なお、「未完成的な証明」を抑制し、成功的な証明活動を促進する教授方略が科学的に確立されているとは言い難いのである。よって、「未完成的な証明」を生み出す要因を同定し、それを解消、あるいは予防する教授方略を開発することは喫緊の課題である。海外でも、「未完成的な証明」に対する教授方略の研究が行われている〔Lin, 2005; Heinze et al, 2008〕。

(2) 「未完成的な証明」を生み出す生徒の架橋過程 - 3種類の推論

Heinze ら(2008)によれば、証明を構成することは、推論規則を用いて仮定と結論に橋を架ける過程(以下、架橋過程)である。架橋過程では、仮定と結論を繋ぐ「中間命題」を見出すことが重要になる。「中間命題」を見出すために、仮定と結論の両方から推論し、仮定からの前向き推論と結論からの後向き推論とを繋げる「命題」を選択することが鍵となる〔Solow, 1985; 清水, 1994; Heinze et al, 2008〕。

ところが、この架橋過程をうまく遂行できないことが、「未完成的な証明」を生み出す認知的要因であることが明らかになってきた。例えば、証明を成功的に構成できる生徒の多くは、後向き推論を用いているが、「未完成的な証明」を生成する生徒は後向き推論を用いずに、前向き推論だけを用いる傾向にある〔牧野, 2009, 2010〕。また、最近のインタビュー調査によって、結論から後向き推論をしたとしても、最終段階で前向き推論と後向き推論を繋げることができないために、「未完成的な証明」に留まる生徒を見出した。

そこで、架橋過程で鍵となる次の3つの推論に着目して、各推論に対する中学生の認知的要因とその背後の思考を分析することを考えた。その結果として、「未完成的な証明」を生成している中学生の「架橋過程」の実態に迫ることができ、教授方略への有用な情報が得られることが期待される。

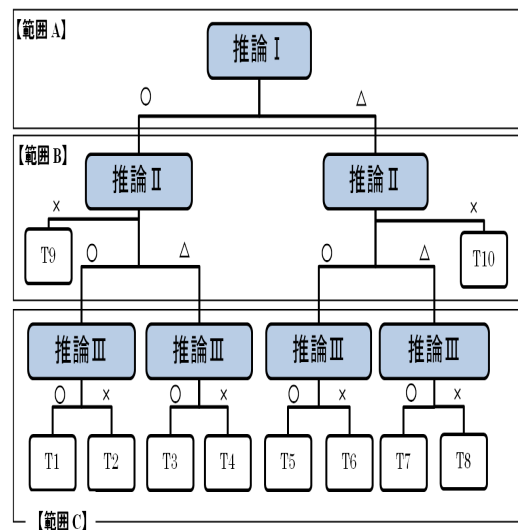
推論 : 仮定からの前向き推論

推論 : 結論からの後向き推論

推論 : 前向き推論と後向き推論を繋げる推論

以上のことから、本研究課題を設定するに至った。

各推論について、それぞれ成功あるいは失敗が考えられる。それによって、中学生の「未完成的な証明」がタイプ分けでき、それを、推論の視点で【範囲A】、【範囲B】、【範囲C】にグループ化したのが次図である。研究期間内では、【範囲C】を中心に取り上げることとした。すなわち、本研究で取り上げる「未完成的な証明」とは推論に失敗しているものである。



(3) 学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

「未完成的な証明」の生徒に対して「色付け方略(coloring strategy)」や「読み - 色付け方略(reading-coloring strategy)」といった教授方

略が考案されている〔Lin, 2005; Heinze et al, 2008〕. これらの教授方略は, 情報を見やすくするとともに操作しやすくなるという点で, 架橋過程の遂行に効果的であるとされている. しかし, Lin や Heinze らは, それらの方略が, 架橋過程の何に, どのように効いたのかについて詳細に言及していない.

それに対して, 本研究では, 架橋過程で鍵となる推論に着目する. そして, これまでの証明研究では推論の重要性が指摘されているが, 次の理由から推論に焦点を当てる. それは, 推論に成功するか失敗するかが, 証明が「完成」へ至るか「未完成」に留まるかの最終関門であり, 推論が遂行できたとしても推論に成功しなければ完成しないこともあるからである. 実際, 推論に困難を持つ生徒がある程度想定される. このように, 推論に焦点を当てている点に, 本研究の独創性がある.

また, 推論が生徒にとって困難であることはこれまでの研究・実践において共通認識されているが, 「推論ができない生徒が持つ認知的要因や思考パターン」等々を解明する研究は国内外において本格的に行われていないのである. この点も, 本研究の独創的な点である.

最後に, 本研究を通して, 推論を成功的に遂行できない生徒が持つ認知的要因とその背後の思考パターンが解明され, 推論を成功的に遂行できるようになるための要件が見出される. これによって, 「未完成な証明」を生み出す要因を解消し, 「未完成」から「完成」へ促す治療的教授方略とともに, 「未完成な証明」を未然に防ぐ予防的教授方略の開発への重要な情報を得ることができる. そして, 我が国の証明の学習状況を改善する教授方略の確立といった, 教育実践への貢献が大いに期待できる.

## 2. 研究の目的

「架橋過程」に含まれる推論過程を成功的に遂行できない中学生の認知的要因とその背後にある思考パターンを解明し, それに基づいた教授方略を開発する. そのために, 次の3つの課題を設定した.

### 課題

「未完成な証明」を生成する中学生の「架橋過程」での認知的要因と思考を同定する.

### 課題

「未完成な証明」を生成する中学生の「架橋過程」での思考の特質を解明する.

### 課題

「未完成な証明」を生成していた中学生が「架橋過程」を成功的に遂行できるようになるための教授上の視点を見出す.

上述の3つの課題を解決することが本研究の目的である.

## 3. 研究の方法

課題の解決のために, 認知的要因や思考パターンを分析する枠組みを構築する. そして, インタビュー調査を実施して, 推論ができなかった中学生の認知的要因と思考パターンを探る.

課題の解決のために, インタビュー調査を実施し, 推論ができた中学生の数学的認知や思考パターンを探る. そして, 推論ができなかった中学生と比較し, それぞれの共通点, 相違点を示す.

課題の解決のために, 証明の授業を分析して, 教授方略の実態, 「未完成な証明」をもたらす教授上の要因を特定し, 教授方略を考案する.

## 4. 研究成果

(1) Boero(1999)による研究から, 証明の構成過程には私的な側面と公的な側面があるので, それを区別して議論することとした. そして, 中学生による証明の構成過程の認知的側面を分析する視点を得た. 具体的には, Heinze ら(2008)の研究から, 「仮說的架橋」と「調整」が鍵であることが明らかになった. また, Boero(2001)による代数の証明問題の解決過程における「予期(anticipation)」の機能について考察し, 証明過程における「予期的思考(anticipatory thinking)」について知見を得た. 予期的思考については, Furinghetti & Morselli(2004)でも, 証明の構成過程における認知的要因として指摘されていた. 「仮說的架橋」や「調整」を促進する上で「予期的思考」が重要な役割を果たす可能性があることを見出した.

(2) 「未完成な証明」とその認知的要因をはじめ, 証明活動の困難についての先行研究を調べ, 研究の成果と課題を整理した. 「未完成な証明」は生徒によって書かれた誤りや飛躍を含む証明と捉える立場と, 証明のアイデアあるいは方針の段階のものとして捉える立場があることがわかった.

「未完成な証明」に分類される生徒のコンピテンシーとして, 次の4つを挙げられている.

- ・推論にとって不可欠な要素を認識することができる.
  - ・仮定と結論を明確に区別することができる.
  - ・特に, 2段階の証明問題で, 用いられる定理の諸条件を点検することができる.
  - ・仮定, 結論, 定理という立場に従って, 言明を組織して演繹的ステップを作ることができる.
- 未完成な証明を生成する生徒は, 次のことができないことが指摘されている.
- ・演繹的なステップを組織して, 一つの証明を作ることができない.
  - ・与えられた前提の中のいくつかの暗示的情報を視覚化することができない.
  - ・必要とされる数学の性質を認識できない.
  - ・必要となる言明や演繹的ステップのすべて

に気づくことができない。

なお、その他にも、証明に失敗した学生の認知的要因も指摘されている。

- ・複数の例を探求しないし、生成しない。
- ・代数について習得していない。
- ・予期的思考をしない。
- ・証明ストラテジーを全く省察しない。

(3)証明活動に関わる認知的困難について先行研究を整理した。証明活動に伴う認知的困難は様々あることがわかった。例えば、次のようなものがある。

- ・証明に含まれる概念の理解の不足
- ・証明に関する「方法論的知識」の欠落
- ・証明に関する「方略的知識」の欠落

そして、それぞれを Schoenfeld(1992, 2010)による数学的認知を捉える枠組みに位置付けた。

(4)Heinze らの研究における「仮説的架橋」と「調整」を視点に、「未完成な証明」を生成する中学生の認知的要因を分析する枠組みを構築した。

【仮説的架橋】の観点

- (a)前提から「中間の結論」を見出しているか。
- (b)結論から「中間の前提」を見出しているか。
- (c)前提と結論を繋げるために、複数の中間の結論や中間の前提の中から、繋がる可能性のある中間命題を選択しているか。

【調整】の観点

- (d)証明で使用可能な性質を収集しているか。
- (e)証明の演繹ステップを評価しているか。
- (f)証明全体に誤りや飛躍に気付いているか。

(5)生徒による解答を分類する基準を設定し、生徒の解答を分類した。生徒の解答の分類は、観点 A:「仮定から結論まで繋がられているか」と、観点 B:「推論には誤りや飛躍がないか」を観点に行った。その結果、「観点 A に成功、観点 B に失敗」のタイプ、「観点 A に失敗、観点 B で成功」のタイプ、「観点 A と観点 B の両方で失敗」のタイプを、「未完成な証明」とした。

(6)「未完成な証明」を生成した生徒を抽出し、インタビュー調査を実施した。その結果、「未完成な証明」を生成している中学生は、「仮説的架橋」と「調整」のいずれか一方だけがうまくいっていないだけでなく、両方ともうまくできていないという認知的特徴があることがわかった。

推論ができなかった生徒は推論だけを行う傾向にあった。それに対して、推論ができる生徒は、推論と推論の両方を行っていると同時に、「予期的思考」と「転換的思考」が機能していることがわかった。

それに加えて、「調整」がうまく機能しない生徒は、証明の公的な側面への意識が欠落している可能性も示唆された。

(7)「未完成な証明」を生成する生徒が持つ認知的特徴をもとに、仮説的架橋に失敗している生徒と、調整に失敗している生徒への指導の手立てを推察した。

例えば、結論から仮説的架橋を遂行しない生徒には、両方向からの仮説的架橋を遂行する意義を実感的に理解する場を設定することを示唆した。また、最終的な証明全体の論の流れを把握していない生徒には、証明全体の論の流れが受け入れられるかどうかを検討し、受け入れられない場合は、証明全体の流れを受け入れられるように修正する機会を提供することを示唆した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

牧野智彦, 未完成な証明を生成する生徒の認知的特徴を分析する視点, 査読無, 第 46 回日本数学教育学会秋期研究大会発表集録, 2013 年, 361-362.

牧野智彦, 中学校数学での証明の「架橋過程」を妨げる認知的要因, 第 45 回日本数学教育学会数学教育発表会論文集, 2012 年, 875-880.

牧野智彦, 中学生が生成する「未完成な証明」を特徴付ける観点について, 査読無, 宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要, 35 巻, 2012 年, 293-298.

〔学会発表〕(計 3 件)

牧野智彦, 未完成な証明を生成する生徒の認知的特徴を分析する視点, 日本数学教育学会, 第 46 回秋期研究大会発表集録, 2013 年 11 月 7 日, 宇都宮大学.

牧野智彦, 中学校数学での証明の「架橋過程」を妨げる認知的要因, 日本数学教育学会, 第 45 回数学教育発表会論文集, 2012 年 11 月 11 日, 奈良教育大学.

MAKINO Tomohiko, Japanese Students' Cognitive Difficulty in Bridging Process to Construct Geometrical Proof, ICME-12, The 12th International Congress on Mathematical Education, 2012 年 7 月 13 日, COEX, Seoul, Korea.

## 6. 研究組織

(1)研究代表者

牧野智彦 (MAKINO TOMOHIKO)  
宇都宮大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 10450157

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし