

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 24 日現在

機関番号：12401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740003

研究課題名(和文)高次元アフィン代数幾何学と極小モデル理論の融合

研究課題名(英文)Applications of minimal model theory to higher dimensional affine algebraic geometry

研究代表者

岸本 崇 (KISHIMOTO, Takashi)

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：20372576

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：代数幾何学で取り扱う代数多様体は大きく分けて、射影多様体とアフィン代数多様体の2つに分けられる。これら2つのクラスのうち射影多様体に関しては、交点数の理論を出発点として極小モデル理論という非常に有用な理論がある。一方、アフィン代数多様体については、代数的に可換環論的な視点から取り扱うことも可能であるが、それだけではなかなか内在的な幾何学的な性質を解析することは難しい。そこでアフィン代数多様体を射影多様体の中に埋め込んでおいてから、そこで極小モデル理論を適用して、もともとのアフィン代数多様体の構造を調べるといった試みを行い、それに関連した結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：Roughly speaking, algebraic geometry deals with two classes of varieties, so-called, projective varieties and affine algebraic varieties. These two classes behave quite differently. The former one, namely, projective varieties can be analyzed by use of several very useful theories, in particular, minimal model theory, which plays remarkably important role for the study of projective varieties from the viewpoint of the behavior of distinguished rational curves. Whereas, as for the latter one, i.e., for affine algebraic varieties, we do not have so far a useful method to investigate them. One of the main reasons to explain this difficulty lies in an impossibility to take a limit over such varieties. To overcome it, we are trying to embed a given affine variety into a projective one in order to apply above mentioned minimal model theory. Of course, several obstacles occur along this attempt, nevertheless we succeed to obtain some useful results.

研究分野：代数幾何学

キーワード：極小モデル理論 アフィン代数多様体 ユニポテント代数群作用 affine ruledness

1. 研究開始当初の背景
代数幾何学に於ける研究対象は大きく分けて2つある。1つは可換環論的な趣きのあるアフィン代数多様体であり、もう1つはアフィン代数多様体の貼り合わせとして構成される射影多様体である。射影多様体に関して言えば、交点数理論という非常に汎用性のある道具がある。これは大雑把に言えば、考えている射影多様体の中に含まれる部分多様体を線形化して考える概念である。本来、考えている幾何学的対象は極めて非線形的なもので直接的に取り扱うのは困難であるのだが、交点数による視点によって様々な部分多様体がどのように交叉しているのかということと比較的に容易に計算できる。この交点数を基盤にして大変に有用性のある理論が射影多様体に対しては現在までに進展してきている。代表的なものに森理論(極小モデル理論)というものがある。これは、与えられた射影多様体を双有理的に変化させて代数幾何学的によりシンプルな構造を有する射影多様体にする為の理論である。この様に、射影多様体に対しては現在までに有用な理論が進展してきているのだが、その一方で、アフィン代数多様体に対しては多様体の性質上、現在までに用いられている手法は主に可換環論的・純代数的なものに終止している。このような手法は、具体的な対象の構造を解析したり、何らかの問題に対して反例を構成したりするときには確かに有効であるのだが、アフィン代数多様体の一般理論を展開するには不向きである。これはアフィン代数多様体とその座標環に注目して構造解析をしているからである。アフィン代数幾何学の様々な重要未解決問題を考察する為には、ここで視点を変えて、アフィン代数多様体を幾何学的に前述した極小モデル理論を適用することによって、より本質的・内在的な構造解析を行う必要がある。
2. 研究の目的
さて、与えられたアフィン代数多様体 X をどのようにして極小モデル理論を適用して観察したら良いのであろうか？最も素直な方法としては、与えられたアフィン代数多様体 X を開集合として含む

適当な射影多様体を選ぶというものである。その後、極小モデル理論を実行して、もともとの X の性質を把握するという試みである。この試みはしかしながら、大きな困難点がある。 X が2次元のときまでは大きな問題点は発生しないのであるが、3次元以上になると極小モデル理論の実行によって因子収縮射ではない双有理写像が起こってしまうケースがある。これは所謂フリップと呼ばれる双有理写像であり、これが発生した場合には、対応する双有理写像は余次元1の部分では同型となる。言い換えれば殆ど同型である訳だから扱い易いのではないと思われるかもしれないが、 X の双正則的な構造を解析するには大きな障害が発生する。例えば3次元の場合に極小モデル理論の途中でフリップが発生すると、その不確定点は曲線になっているが、これが X の射影多様体への埋め込みに関する境界因子部分に含まれている場合には問題はないのであるが、一方、含まれていない場合にはフリップを経由して X がどのように変化するかを把握するのは困難になり、場合によってはアフィン性さえ崩れてしまう可能性もある。これは、双正則的な性質を解析することが要求されるアフィン代数幾何学では致命的な困難点である。この様に、完全に一般的な設定では(高次元)アフィン代数幾何学に極小モデル理論を適用するという試みはまだ現実味が少ない。そこで、与えられたアフィン代数多様体 X に付加的な条件(例えば X はある種のファイブレーション構造を備えているとか、ある種の代数群作用を有しているとか)を課した上で、双有理幾何学的、極小モデル理論をより明示的に記述することを本研究課題の主目的である。

3. 研究の方法
「研究の目的」の項目で述べた研究目的をより詳細にどのような設定の下で考察したのかについて述べる。それは2つの方向で高次元アフィン代数多様体 X に条件を課す。
(1) 1つ目は、 X に特殊な代数群作用がある場合である。より正確には、 X がある偏極多様体 (Y, H) 上の(一般化された)アフィン錐である

ケースである。このとき、どのようなときに X は 1 次元加法群スキーム G_a の作用を有するのか？という問題を考える。この問題に対する私のアプローチの特徴は、問題そのものは X の G_a -作用の存在というアフィン代数幾何学的なものであるが、本質部分は Y に含まれる H -偏極シリンダーの存在という言葉に翻訳できるという部分である。これは次のメリット(a), (b)がある。

- (a) まず、問題の主役がアフィン代数多様体 X から射影多様体 Y に交代するので、 Y に双有理幾何学的な手法を適用できる。
- (b) また、 Y の次元は X の次元より 1 つ下がる。次元が下がれば X に比べてよりシンプルな理論で済む。場合によっては、議論が帰納的になる。

これら(a), (b)のアドバンテージを味方に、ある種の偏極多様体(Y, H)上のアフィン錐には G_a -作用が存在しないことを証明することができる。

(2) 2つ目は、 X がファイブレーション $f: X \rightarrow Z$ でその一般ファイバーが非有理曲線上の A^1 -ファイブレーション構造を備えているケースである。特殊な状況ではあるが、この場合には、 X の次元に関わらず統一的に議論できるというメリットがある。 X を適当な射影多様体に埋め込んで、 $f: X \rightarrow Z$ を延長した射が定義されているようにしておく。(いつでもこのような状況にすることはできる。)この射に関して相対的に極小モデル理論を実行すると、確かに2「研究の目的」で述べた困難点を完全に取り除くことはできないのであるが、一般ファイバーに備わっている A^1 -ファイブレーション構造は崩れないように実行することはできる。この利点によって、もともとの X の構造を詳細に解析することができる。

4. 研究成果

3「研究の方法」で述べた(1), (2)方向で得られた結果・成果を簡潔に述べる。

- (1) $(Y, -K_Y)$ を次数が 3 以下の非特異 del Pezzo 曲面とする。このとき、 $(Y, -K_Y)$ 上のアフィン錐は G_a -作用を持たない。厳密にいうと、次数が 1, 2 以下の場合には

Kishimoto-Prokhorov-Zaidenberg による共同研究による結果であり、残る次数が 3 の場合は Cheltsov-Park-Won による結果である。この結果は、 Y 内に反標準偏極のシリンダーを含まないということを証明することが本質的なのであるが、その証明には Y のログ標準閾値(log canonical threshold)という双有理幾何学の概念を有効に利用する。

- (2) $f: X \rightarrow Z$ をその一般ファイバーが非有理曲線上の A^1 -ファイブレーションを備えているとする、このとき、必要に応じて底空間 Z の開集合上に制限することによって、 f は $f: X \rightarrow Y \rightarrow Z$ と分解して、 $X \rightarrow Y$ を A^1 -ファイブレーションであるようにすることができる。ここで、 $f: X \rightarrow Z$ の一般ファイバーは有理曲面ではないという所が重要である。実際に、一般ファイバーが有理的であって、 A^1 -ファイブレーションを備えている場合には、主張にあるように f を分解することは一般には不可能である。(実際にそのような例は得られている。)

(2)' しかしながら、 $f: X \rightarrow Z$ の一般ファイバーが有理的で A^1 -ファイブレーションを有しているケースであっても、 Z の適当な開集合と、その後で適当な etale 有限写像を選ぶことによって、対応する f のファイバー積は A^1 -ファイブレーションを用いて分解することができるということを証明することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① Adrien Dubouloz and Takashi Kishimoto, *Log-uniruled affine varieties without cylinder-like open subsets*, *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 143 (2015), 383-401. (査読有)

② Takashi Kishimoto, *Remark on deformations of affine surfaces with A^1 -fibrations*, *Automorphisms in Birational and Affine Geometry* (I. Cheltsov, C. Ciliberto, H. Flenner, J. McKernan, Y. Prokhorov and M.

Zaidenberg Eds), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 79 (2014), 363-379. (査読有)

③ Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov and Mikhail Zaidenberg, *Unipotent group actions on del Pezzo cones*, Algebraic Geometry, 1 (2014), 46—56. (査読有)

④ Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov and Mikhail Zaidenberg, *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, Osaka Journal of Mathematics, 51 (2014), 1093—1112. (査読有)

⑤ Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov and Mikhail Zaidenberg, *G_a -actions on affine cones*, Transformation Groups, 18 (2013), 1137—1153. (査読有)

⑥ Takashi Kishimoto, *Miyanishi's characterization of singularities appearing on A^1 -fibrations does not hold in higher dimensions*, Affine Algebraic Geometry, Proceedings of Conference on Affine Algebraic Geometry (Eds. K. Masuda, H. Kojima and T. Kishimoto), World Scientific (2013), 103—127. (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

① Takashi Kishimoto, *Families of affine ruled surfaces: Existence of cylinders*, 2014 年 11 月 3 日, 射影多様体の幾何とその周辺 2014(於 高知大学, 高知県, 高知市).

② Takashi Kishimoto, *Birational tentative to produce a counter-example for Abhyankar-Sathaye embeddings problem of dimension three*, 2014 年 7 月 8 日, Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups (於 京都大学数理解析研究所, 京都府, 京都市).

③ Takashi Kishimoto, *Deformations of irrational affine ruled surfaces*, 2013 年 11 月 30 日, 代数幾何学小研究集会-新潟-(於 新潟大学駅南キャンパスときめいと, 新潟県, 新潟市).

④ Takashi Kishimoto, *Deformations of irrational affine ruled surfaces*, 2013 年 10 月 22 日, 代数幾何学城崎シンポジウム (於 兵庫県立城崎大会議館, 兵庫県, 豊岡市).

⑤ Takashi Kishimoto, *Minimal model program after resolutions of pencils of cubic surfaces and non-standard embeddings of A^1 into A^3* , 2013 年 3 月 4 日, 第 11 回アフィン代数幾何学研究集会 (於 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 大阪府, 大阪市).

⑥ Takashi Kishimoto, *An application of the minimal model program in studies on affine algebraic threefolds*, 1st November 2012, Groups of automorphisms in birational and affine geometry, at Bellavista Relax Hotel, Levico Terme (Trento), Italy.

⑦ Takashi Kishimoto, *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, 2012 年 8 月 30 日, 南九州代数系集会 (於 熊本大学, 熊本県, 熊本市).

⑧ Takashi Kishimoto, *Resolution of pencils and an application of minimal model program in threefolds*, 1st August 2012, International Conference on Affine Algebraic Geometry and Related Topics, at School of Mathematics, Jilin University, Changchun, China.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :

番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 岸本 崇
(KISHIMOTO, Takashi)
埼玉大学・理工学研科科・准教授

研究者番号：20372576

(2) 研究分担者
()

研究者番号：

(3) 連携研究者
()

研究者番号：