

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740004

研究課題名(和文) ファノ多様体の研究

研究課題名(英文) Study of Fano varieties

研究代表者

高木 寛通 (Takagi, Hiromichi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30322150

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：細野氏とReye合同型Calabi-Yau 3-foldの射影幾何的性質，ミラー対称性，導来圏を研究した．細野氏とは，Reye合同型Enriques曲面とArtin-Mumford double solidの導来圏の関係も確立した．Zucconi氏と，次数5のdel Pezzo型Fano多様体上の有理曲線族とスピン曲線のモジュライ空間の関係を与える理論を構成し，それに基づき，「種数4のスピン曲線」，および，「種数2以上の超楕円の代数曲線とその上の1点，それから，その上のtheta characteristicで大域切断を持たないもの，という3つ組」のモジュライ空間が有理的であるという成果を得た．

研究成果の概要(英文)：With Shinobu Hosono, I studied Calabi-Yau 3-folds of Reye congruences about their projective geometry, mirror symmetry, and derived category. With him, I also established the relation between the derived categories of Enriques surfaces of Reye congruences and Artin-Mumford double solids. With Francesco Zucconi, we constructed a theory giving a relation between the moduli space of rational curves on the quintic del Pezzo 3-fold and that of spin curves. Based on this, I showed that the following moduli spaces are rational: (1) The moduli space of genus 4 spin curves (2) The moduli spaces of triplets (C, p, s) , where C is a curve of genus not less than 2, p is a point of C , and s is a theta characteristic on C without global section.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Fano variety rationality of moduli Key variety Calabi-Yau variety Reye congruence Enriques surface quartic double solid

1. 研究開始当初の背景

当該科研費の援助を受けて得られた研究成果は以下の二つのテーマ 1, 2 に属する。

1 Reye 合同型と呼ばれる3次元Calabi-Yau多様体、及びEnriques曲面の研究

これは細野忍氏(学習院大学)との共同研究である。研究開始時において、後者のReye合同型Enriques曲面はすでに古典的対象として知られていたが、前者の研究を本格的に開始したのは私と細野氏が初めてである。我々が明らかにしたのは、前者についてはそのミラー対称性および導来圏の性質、後者についてはその導来圏の性質である。後者の導来圏の性質については、研究当初、部分的な性質が知られていた。

2 3次元Fano多様体上の有理曲線族を用いたスピン曲線のモジュライ空間の研究

これはFrancesco Zucconi氏(Udine大学)との共同研究である。研究開始時において、向井茂氏による、種数12のFano多様体の直線族を用いた種数3のスピン曲線のモジュライ空間の研究があり、本研究はその一般化である。

2. 研究の目的

前項の二つのテーマに分けて説明する。

1 Calabi-Yau多様体のミラー対称性は、数理論理を起源としており、物理と数学の双方を刺激し交錯させる原動力となっている。それを踏まえ、我々の研究目的は、Reye合同型Calabi-Yau多様体をミラー対称性の観点から調べることに、また、ミラー対称性との関連で、Reye合同型Calabi-Yau多様体の導来圏を調べることに、さらに、ミラー対称性は離れるが、Reye合同型Enriques曲面の導来圏を調べることである。

2 古くから様々なモジュライ空間の双有理幾何的性質、特に有理性判定の問題が研究されてきた。それを踏まえ、我々の研究目的は、一つの重要なモジュライ空間のクラスに属する、スピン曲線のモジュライ空間の性質、特にその有理性の判定である。

3. 研究の方法

1 Reye合同型Calabi-Yau多様体とEnriques曲面のミラー対称性に関係した性質および導来圏を、それらの射影幾何で解釈することによって研究する。射影空間においてこれらの多様体の定義方程式は対称行列の小行列式である。この記述がこれらの多様体を射影幾何的に調べることを可能にする。

2 次数5のdel Pezzo型Fano多様体とその上の固定した次数dの有理曲線Cを与える。

Cと交わる直線のパラメータ空間として代数曲線Rが得られ、さらに、それら直線の交わりを考えることによって、この代数曲線上にスピン構造(theta characteristic) s が入る。この構成を用いて、スピン曲線 (R, s) のモジュライ空間の性質をCのモジュライ空間の性質に帰着させて調べるとというのが研究方法である。

4. 研究成果

1 下記論文3, 4, 5がこのテーマの研究成果である。

論文3において、Reye合同型Calabi-Yau多様体Xおよび、それと対をなすCalabi-Yau多様体Yを、対称行列の小行列式を用いて構成し、XとYが同じミラーを持つことを示した。このことから、XとYの導来圏が同値となるという予想を提出した。また、XとYのミラー対称性について、さらに、XとYのBPS数を計算し、それらのいくつかをXとYの射影幾何で解釈した。

論文4においては、Reye合同型Calabi-Yau多様体Xのミラー族のオーピフォールド構成を与えた。それは、行列式型5次超曲面の特別な族を注意深く選び、そのクレパント特異点解消を構成することで実現された。副産物として、Xの不分岐二重被覆である $P^4 \times P^4$ の完全交叉のミラー族の構成も得られ、また、そのモノドロミーを決定した。

論文5では、論文3で予想していた通り、Calabi-Yau多様体XとYの導来圏が同値であることを示した。XとYの導来圏の同値は、Xでパラメータ付けられる、Y上の、種数3、次数5の曲線族のイデアル層によって与えられる。この曲線族は、論文3において得られたYのBPS数によって、その存在が予言されていた。

なお、Reye合同型Enriques曲面とArtin-Mumford double solidの導来圏の関係も確立した。この論文は現在投稿中である。

2 下記論文1, 2がこのテーマの研究成果である。

論文1では、研究方法で説明した通り、次数5のdel Pezzo型Fano多様体とその上の固定した次数dの有理曲線Cからスピン曲線 (R, s) を構成し、Cと (R, s) のモジュライ空間の関係を与える基礎理論を構成した。このような基礎理論の構成は、2011年度に出版された我々の論文Spin curves and Scorza quartics (Math. Ann)でもなされている。

論文 2 では、これらの基礎理論を踏まえて、

種数 4 のスピン曲線のモジュライ空間が有理的であることを示すことに成功した。これは種数 3 の場合に続く成果でありながら、3 次元 Fano 多様体を援用する全く別の方法で得られた。

さらに、当該科研費による研究期間中に「種数 2 以上の超楕円の代数曲線とその上の 1 点、それから、その上の theta characteristic で大域切断を持たないもの、という 3 つ組のモジュライ空間は有理多様体である」という成果も、上記基礎理論に基づいて得ていたが、29 年度になって Nagoya Math J. への掲載が確定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

1 Hironichi Takagi and Francesco Zucconi: Geometries of lines and conics on the quintic del Pezzo threefold and its application to varieties of power sums, Michigan Math. J. 61 (2012) 19--62.

2 Hironichi Takagi and Francesco Zucconi: The moduli space of genus 4 spin curves is rational, Adv. in Math., 231 (2012), 2413--2449.

3 Shinobu Hosono and Hironichi Takagi: Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I, J. Algebraic Geom. 23 (2014), 279--312.

4 Shinobu Hosono and Hironichi Takagi: Determinantal Quintics and Mirror Symmetry of Reye Congruences, Comm. Math. Phys., 329 (2014), no. 3, 1171--1218.

5 Shinobu Hosono and Hironichi Takagi: Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence, J. Differential Geom. 104 (2016), no. 3, 443--497.

[学会発表](計 10 件)

1 Reye congruence, old and new, 代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 首都大学東

京 秋葉原サテライトキャンパス, 2013 年 1 月 26 日

2 Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence, GCOE research activity, Seminar weeks on Calabi-Yau manifolds, mirror symmetry, and derived categories, 東京大学大学院数理科学研究科, 2013 年 2 月 19 日

3 Reye 合同の幾何学, 代数幾何学城崎シンポジウムにて, 城崎大会議館, 2013 年 10 月 24 日

4 線形切断いろいろ, 研究集会「Fano 多様体の最近の進展」にて, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 12 月 18 日

5 Geometry of Calabi-Yau 3-folds of Reye congruences, 第 7 回駒場幾何学的表現論と量子可積分系のセミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, 2013 年 12 月 21 日

6 Enriques 曲面の導来圏と非可換代数, 研究集会「(非)可換代数とトポロジー」における 3 回講演, 信州大学理学部, 2015 年 2 月 13 日--2 月 15 日

7 On classification of prime Q-Fano threefolds with only $1/2(1,1,1)$ -singularities of genus >0 , 第 13 回アフィン代数幾何学研究集会における講演, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2016 年 3 月 5 日--8 日

8 $1/2(1,1,1)$ 特異点しか持たない種数 1 以下の prime Q-Fano 3-fold の分類に向けて---森先生の Fano 多様体研究へのオマージュとして---, 京都大学理学部代数幾何セミナー, 2016 年 3 月 9 日

9 Q-Fano 3-fold with $1/2(1,1,1)$ -singularities revisited, 都の西北代数幾何学シンポジウム, 2016 年 11 月 15 日--18 日

10 On key varieties of Q-Fano threefolds with only $1/2(1,1,1)$ -singularities, 京大数理研 研究集会「代数的層のモジュライの研究とその周辺」, 2017 年 2 月 1 日--3 日

[図書](計 0 件)

[産業財産権] 該当なし

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:

権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木寛通（TAKAGI HIROMICHI）
東京大学大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150

(2) 研究分担者 なし
()

研究者番号：

(3) 連携研究者 なし
()

研究者番号：

(4) 研究協力者 なし
()