

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740011

研究課題名(和文)量子シューア代数、Koszul 双対性と圏化

研究課題名(英文)Quantized Schur algebras, Koszul duality and categorifications

研究代表者

宮地 兵衛 (MIYACHI, Hyohe)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90362227

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：100年程前に始まった表現論という数学がある。代数・幾何・解析といった様々な数学の寄与を受け、また逆に与えてきた。高校化学で最も重要なことの一つは、原子の概念であり、最小単位の意味で習う。表現論において対応するのは、単純対象である。加えて、高校化学において分子の概念もまた重要である。ある意味、表現論においてこの対応物は直既約射影対象である。所以は単純な対象から分かれられないように拡大されたものだからだ。

先達の偉大な発見により研究課題ではこれら2種の対象は、2種類の柏原大域的基底と自然に解釈できる。これらの解釈に想を得て、我々はこれら2種の対象物の入れ替えの圏論的かつ自然な解釈を発見した。

研究成果の概要(英文)：About 100 years ago, Representation Theory launched. There are various mathematical research fields such as algebras, geometry and analysis, and Representation Theory interacts with them. One of the most important thing in High school chemistry is the notion of atom, which represents the smallest basic unit. In Representation Theory, the corresponding notion is the simple object. Moreover, molecules in High school chemistry are also important. In a sense, the corresponding notion of these in Representation Theory are projective indecomposable objects, which are extended as unbreakable units by simple objects as possible.

By standing on the shoulder of giants, we knew that those two kinds of objects are interpreted as two kinds of Lusztig's canonical bases also known as Kashiwara's global crystal bases in the research area on this report. Based on those interpretation we found in the category theory a natural interpretation on exchanging those two kinds of objects.

研究分野：表現論

キーワード：表現論 量子群 Hecke環 準遺伝的多元環 圏化 導来同値

1. 研究開始当初の背景

Level-Rank 双対という2つの無限次元の一般線型 Lie 代数の可換な作用が入る空間がある。昔から大変活発に研究され、90年代 Uglov により無限次元の Hecke 環を媒介にしてこの空間は量子化された。この量子化された空間の特異なベクトルで生成される部分空間は、Lascoux-Leclerc-Thibon 予想にも登場し、有木理論へとつながっている。

また Chuang-Rouquier による sl2-categorification の理論が登場し(現行は Kac-Moody で良い)、対称群で Chuang-Kessar の今で言う RoCK block の結果、有限一般線型群で Turner もしくは私の学位論文の結果と合わせて Broué の可換不足群予想の解決等の華々しい成果が上がっていた。sl2-categorification が可能になった系として、量子シューア代数、対称群の群環、有限一般線型群の群環の導来同値類を正確に記述することが出来るようになり、不足群の言葉や柏原結晶基底の言葉で特徴付けることが出来るようになっていた。

そうした中、Rouquier による準遺伝的被覆理論が登場し、量子シューア代数 S の表現圏 $S\text{-mod}$ と level 1 の有理的 Cherednik 代数 (Rational double affine Hecke algebra) の圏 \mathcal{O}_1 の同値性が示された。彼は、level の高いときのこれら 0 を "シューア代数の拡張" と呼んでいた。これら 0 は、半単純 Lie 代数の 0 の時の類似であり次数付線形圏であり Koszul になることを多くの研究者が予測していた。

一方で2001年あたりから Chuang, Tan と私は量子シューア代数の Koszul 双対の相手は何かをずっと探し求めていた。先述のように当時量子シューア代数の今で言う RoCK block という特別な無限系列を熟知しており、Koszul 性も簡単に示せたからである。

2. 研究の目的

Rouquier の準遺伝的被覆理論が登場した後、この Koszul 双対の相手は、再び(一般には別の) 0 であることに気付いた。Koszul 双対性は、単純対象と直既約射影対象を入れ替える相関関係である。単純対象の同値類の代表を集めたものの米田代数がこれにあたる双対の相手であるが、元来持ち合わせていた次数と Ext の次数が同じになり、生成・関係式が本質的には2次で尽きるようなとき Koszul という。単純対象は、その名の通り最小単位であり、直既約射影対象は、対象物への射全てを統括するのに不可欠な基本的単位である。これは、圏論的興味から見た目的であるが、先述の Uglov や主に京都学派の人々が創り上げた非常に重要な空間での可換な作用や柏原結晶基底が圏の Koszul 双対性としてさらに理解されることにも意義と目的がある。

また、level1 のとき、つまり量子シューア代数は、三位一体の Lusztig 予想にも直につながり、また、別枠で有限一般線型群の非等標数のモジュラー表現論にも直につながっているという非自明な圏同値が張り巡らされている。(重要な数値的なこと例えば、柏原大域的結晶基底を具体的に求めることは、対称群や一般線型群の分解行列といわれる Brauer より始まる重要不変量を求めることに寄与している。) つまり応用先が豊富にあるということである。

3. 研究の方法

(1) Chuang 氏との共同研究

冒頭の Level-rank 双対については、Koszul 双対だけでなく、実は Ringel 双対も合成した方が自然であるという形で Level-rank 双対の圏版を定式化し、2010年東京での ICRA で Chuang 氏が、同年名古屋大学での Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups '10 で私が予想について講演した。我々は、予想を定式化した preprint を書き、level1 のときに量子群の Lusztig 予想を使い Koszul である事や Rouquier の準遺伝的被覆理論から自然である事等に言及した。

研究会の開催があり、ともに出席できる機会を利用したり、Chuang 氏の居る London で直接研究打ち合わせを行った。例えば、私が有理的 Cherednik 代数の 0 について勉強し、それを Chuang 氏に説明するといった具合である。逆ももちろん行う。また、共に idea を出し合い、励まし合いもする。

(2) Ming 氏との共同研究

科学研究費を使い中国科学院(北京)へ渡航し直接の議論を行った。とりわけ[学会発表]欄の3つめ J. Algebra の創刊50周年記念集会開催の頃に、Ming 氏の所属する中国科学院で集中講義を行い、長期滞在をした期間に共同研究が始まった。たまたま我々2人に共同に興味ある予想があり、その予想に Ming 氏がやっていることが役に立つということを私に説いたところが始まりだった。この期間は、直接の議論が多く出来、進展も速かった。手法は、基本的には3の(3)の記したものとあまり変わらない。Internet 回線で Skype により黒板で説明をしてもらったこともある。

(3) Chuang 氏, Tan 氏との共同研究

手法は、3の(3)とあまり変わりはない。私が主に担当した部分は、計算機によるプログラミングにより実験を重ね、理論が適応できるであろう予測・予想のデータの収集であった。Tan 氏が Singapore 国立大学での国際研究会開催に関わり、Chuang 氏も委員であり、

そこに長期滞在できたことも重要であった。

4. 研究成果

(1) Chuang 氏との共同研究

関連する論文を上げる。

[論文 1] Shan, Varagnolo, Vasserot, Koszul duality of affine Kac-Moody algebras and cyclotomic rational double affine Hecke algebras. Adv. Math. 262 (2014), 370-435. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.05.012>

[論文 2] Rouquier, Shan, Varagnolo, Vasserot, Categorifications and cyclotomic rational double affine Hecke algebras. Invent. Math. 204 (2016), no. 3, 671-786

<http://doi.org/10.1007/s00222-015-0623-7>

[論文 3] Losev, Proof of Varagnolo-Vasserot conjecture on cyclotomic categories \mathcal{O} . Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 2, 631-668. <http://doi.org/10.1007/s00029-015-0209-7>

[論文 4] Webster, Rouquier's conjecture and diagrammatic algebra <https://arxiv.org/abs/1306.0074>

Chuang 氏との Level-Rank 双対についての予想は、主に[論文 1]と[論文 2]によって解かれてしまった。Level-Rank 予想を提出し、ほどなく[論文 1]の preprint が送られてきた。[論文 3], [論文 4]にも我々の予想について言及している。研究成果と言えるのは、これらの論文が我々の予想にクレジットをくれたことに尽きると思われる。

(2) Ming 氏との共同研究

準遺伝的代数の良い系列 (gendo-symmetric 等) では、立川による支配的次元が Hochschild cohomology 等を使い導来圏同値でどう保たれるかを綴った。支配的次元は一般には導来不変量ではない。sl2-categorification により量子シューア代数の block 代数の導来圏同値は構成されており、RoCK block において支配的次元を計算し、全体に導来同値で広げるという結果を得た。この内容の論文を投稿した。

(3) Chuang 氏, Tan 氏との共同研究

Erdmann-Martin が $2p$ 次対称群の標数 p における表現論に関して Ext1 籠を記述した論文がある。 $2p$ 次対称群ということで p で 2 回割られて、weight 2 とか defect 2 という尺度で

難しさを計ることが出来る。この論文にあるような Ext1 籠の綺麗な形が一般の weight, defect でも部分的に登場しないだろうか? という着想を持ち、標数 0 の量子シューア代数の Ext1 籠を考える着想になり、冒頭の背景にある空間において大域的柏原結晶基底の係数を Parallelotope tilings の組合せ論により記述した。(実際は Ext1 をおさえるものより広い範囲を扱っている。)

この内容の論文を投稿した。
Chuang, Miyachi, Tan, Parallelotope tilings and q-decomposition numbers <https://arxiv.org/abs/1607.02803>

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 4 件)

宮地 兵衛, Level-rank duality, Summer School on Quasi-hereditary Algebras, 2016 年 8 月 30 日 大阪府立大学 A5 棟(大阪府堺市)

宮地 兵衛, Cuspidal modules over rational Cherednik algebras and finite Chevalley groups, The Third International Symposium on Groups, Algebras and Related Topics, 2013 年 6 月 11 日 北京大学(中華人民共和国)

宮地 兵衛, Rational Cherednik algebras and finite Chevalley groups in characteristic $l > 0$, Modular Representation Theory of Finite and p -adic Groups, 2013 年 4 月 19 日, シンガポール国立大学(シンガポール)

宮地 兵衛, 一般線形群のモジュラー表現の圏の比較, 日本数学会 2012 年秋季総合分科会 代数学分科会特別講演 2012 年 9 月 20 日 九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)

[図書](計 0 件)

[その他]
ホームページ等

投稿済論文

(1) Joseph Chuang, Hyohe Miyachi, Kai Meng Tan, Parallelotope tilings and q-decomposition numbers <https://arxiv.org/abs/1607.02803>

(2) Ming Fang, Hyohe Miyachi, Hochschild
cohomology and dominant dimension
Preprint, 投稿済

6 . 研究組織

(1)研究代表者

宮地 兵衛 (MIYACHI, Hyohe)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90362227

(4)研究協力者

Chlouveraki, Maria
Chuang, Joseph
Fang, Ming
Leclerc, Bernard
Rouquier, Raphael
Tan, Kai Meng
桑原敏郎 (KUWABARA, Toshiro)