

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740012

研究課題名(和文) 超平面配置の自由性の多角的解析と関連する幾何学の研究

研究課題名(英文) Analysis of freeness of hyperplane arrangements and related geometry

## 研究代表者

阿部 拓郎 (Abe, Takuro)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：50435971

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究計画では、超平面配置の自由性をより深く研究し、更にその幾何学的意味を探究することを目標とした。それらの研究目標は、当初想定を大幅に超える形で達成された。まず、ルート系のイデアルと呼ばれる部分集合から定まるワイル配置の部分配置の位相幾何を、自由配置を用いて記述した。そして、寺尾宏明氏が1980年に開発した自由性に関する加除定理を一般化した剰余定理を証明し、それを用いて剰余的自由配置という、自由性が組み合わせ論的に定まる非常に大きなクラスを定式化した。これらはどちらも、自由性の絡んだ非常に大きな進展であり、本研究計画は大きな成功を収めたといえる。

研究成果の概要(英文)：This research program aims at studying the freeness of hyperplane arrangements more deeply, and investigate its geometry. These aims are achieved and the results are better than we expected. First, for any ideal subarrangements of Weyl arrangements coming from an ideal which is certain subsets of positive roots, we determine its Betti numbers by using freeness which coincides with the dual partition of height distributions of roots in the ideal. Next, we improved Terao's addition-deletion theorem invented in 1980 into the division theorem for free arrangements. By applying it, we enlarged the class in which the freeness depends only on combinatorics, and named divisionally free arrangements. These two results are of the great advances in this research area, so we think this research program is achieved successfully.

研究分野：超平面配置に関する数学

キーワード：超平面配置 自由配置 代数学 代数幾何学 ベクトル束 ルート系とワイル群 イデアル 直線配置

## 1. 研究開始当初の背景

申請者はこれまで、自由配置の幾何学的側面の研究を行ってきた。自由配置は、対応する対数的ベクトル場が自由加群となるような良い性質を持つ超平面配置である。実際、自由基底の次数を用いてポアンカレ多項式が記述可能である。更にこのように決まる指数は、ワイル群の指数と一致するため、自由配置はワイル群やルート系の一般化といえる。

このように重要な自由配置であるが、その位相幾何的な性質はあまりよく知られていなかった。つまり、自由配置は幾何学的・組合せ論的にどのような性質を持つものか、という問いへの答えが存在しなかった。よって、このような研究、つまりいわば自由配置の形に関する研究への期待が高まってきていた。以上が研究開始当初の背景である。

## 2. 研究の目的

1 に記載したような研究開始当初の背景に対し、自由配置研究においては、この 10 年の間に多重配置を用いた代数幾何的手法の導入・進展があった。その発展は目覚ましく、2004 年の吉永正彦氏による Edelman-Reiner 予想の解決や、申請者による Athanasiadis 予想といった、超平面配置の代数と幾何及び組合せ論が交わる予想が次々に解決されていた。そこで申請者はこれらの進展をもたらした手法を精査し進化させることで、自由配置をより深く調べ上げるとともに、その幾何学や組合せ論を探究することで、自由配置はどのような形をした配置であるかを研究することを目的とした。より具体的には

(1) 三次元平面配置に絞った自由配置とその幾何学の解析。

(2) 高次元自由配置の基礎固めと自由性判定法のさらなる探求。

という二点を大きな目的とした研究計画を立ち上げた。

## 3. 研究の方法

以下、上述したそれぞれの目標に分けて述べる。

(1) 三次元平面配置については、吉永正彦氏による三次元配置の自由性に関する特徴づけの定式化を精査し、その中に現れるある不等式を幾何学的に理解することから始めた。不等式から幾何学的情報を読み出すことができれば、様々な様相が見えてくると考えられたからである。実際、申請者はこの研究の開始前に、この不等

式のひとつの解釈を行ったことがあり、経験を生かした研究が可能と考えていた。

(2) 高次元自由配置については、まず三次元の知見を活かすことを考えている。つまり(1)の研究である。少し不思議であるが、経験上、高次元配置の自由性の鍵の一つが、常に三次元配置の自由性と関連してくることがわかっていた。そこで(1)で得られた知見を利用し、高次元化を考えることは常に有用な選択肢である。また、常に自由配置研究のプロトタイプとなるルート系の関連する配置、例えば Catalan 配置や Shi 配置といったものをより深く考察することで、一般化のヒントを探ることも考えていた。

## 4. 研究成果

本研究計画は、当初の予定を大幅に上回る大きな成果を上げたと言断できる。それらは多岐にわたるのですべては説明できないが、特に重要と思われる論文二つに絞って成果を述べる。

まず、下の論文リストの 2 についてである。ルート系には、指数という重要な不変量がある。その面白さの一つは、様々な定義が可能な点にある。正ルートを高さの順に並べ、その双対分割を取ることでわかる、という Shapiro や Steinberg による観察的発見は、Kostant や Macdonald らによる分類に寄らない数学的に深い証明を誘導し、今も様々な研究者により扱われている、非常に興味深い発見である。我々はこの結果を、正ルート全体のイデアルと呼ばれる部分集合に対して一般化することに成功した。即ち、イデアルに対しても高さ分布の双対分割がその指数として意味を持つ、ということが示された。意味とはそして、まさにルート系の場合と同様で、イデアルに属する各ルートに直交する超平面たちの補空間の位相的ポアンカレ多項式を完璧に記述する指数となる。そしてこれが研究計画と合致するのは、証明において自由超平面配置の理論がフルに活用されている点である。これはまさに、高次元の自由性理論の見事な応用であり、かつ自由配置を用いた幾何学の展開という、目標に完全に合致する研究成果である。そのレベルの高さにふさわしく、本結果は Journal of the European Mathematical Society というレベルの高い一般誌に掲載された。

本論文は、北海道大学の寺尾宏明教授及び、ドイツの三名の研究者とともに執筆されており、国際共同研究が見事な形で結実した結果であるといえる。

続いて、下の論文リストの 1 及び、その原点たる 5 について述べる。5 において申請者は、射影空間中の直線配置の幾何学と、その自由性との関連を、吉永氏の不等式の適用に

より明らかにした。具体的には、配置に対して新しく直線を付け加えた際の交点数と、補空間のベッチ数との関係を、自由性理論を用いて明らかにした。更に、交点数と位相的ポアンカレ多項式の根が一致する場合には自由となる、という驚くべき結果も示された。交点数という単純な幾何学の裏に、自由性という代数幾何的事実が隠れていると主張するこの結果は、1で高次元に一般化されることとなる。その際、交点数という理解では一般化は不可能で、交点数の代わりに新しい配置への制限として得られる配置のポアンカレ多項式による、元の配置のその剰余の余りに着目することが重要となった。いずれにせよ、1の基礎は5にある事は間違いない。

その1であるが、主結果を述べるために自由配置の歴史を少しだけ述べたい。自由配置は極めて重要なクラスを超平面配置の中でなしているが、その判定は難問でありつづけている。様々な判定法の中で、最も有用に使われているものは、寺尾宏明氏が1980年に発表した加除定理である。これは、ある配置の自由性が、それから一本超平面を除いた除去配置、及びその超平面へ制限して得られる制限配置の二つの自由性に加え、それらの指数に包含関係があることから導かれる、という構成的な定理である。実際、知られているほとんどの配置はこの定理により構成されている。

この状況に対して申請者の論文1は、寺尾氏の加除定理に35年かけて初めて本質的な進展をもたらした。上述した条件のうち、除去配置の情報は実は不要である、という驚くべき結果がそれである。具体的には、制限配置の自由性プラス、制限配置のポアンカレ多項式が元の配置のそれを割り切れれば、元の配置が自由になることを主張している。つまり、自由性を次元の帰納法のみで示すための十分条件が得られたことになる。この証明には、この十年の間に、吉永氏、寺尾氏及び申請者により進展させられた、自由配置の代数幾何的理解が本質的な役割を果たした。

上述のように、条件を一つ減らすだけでも十分すぎる結果であるが、更にこの定理は様々な応用を持つ。そのうち最大のものが、剰余的自由配置という概念の導入である。二次元配置は常に自由なので、ポアンカレ多項式に剰余関係があるような制限を、次元引く二個与えるような、超平面配置の交わりたちのなす旗が存在すれば、自由になることがわかる。このような旗を剰余旗と呼び、このような旗を持つ配置を剰余的自由配置と呼ぶ。これから明らかなように、剰余的自由配置かどうかは超平面たちの交わりの情報のみから決まる。交わりのみから自由性が決まるか、という主張は寺尾予想と呼ばれ今も未解決であるが、それに対して構成論的に極めて鋭く迫る結果を、剰余的自由配置は与えている。このような配置には、加除定理から構成される帰納的自由配置があったが、それよりも構

成が簡単で、かつ真に大きいクラスであることも1で示された。これは、寺尾予想に対する本質的な進展であり、掲載誌も *Inventiones Mathematicae* という極めてレベルの高い国際誌となったことも、その重要性を証明するものである。

以上、かなり絞ったが、それでも本研究計画に対する結果としては、明確に当初予想を超える結果を残したのみならず、自由配置理論における本質的かつ極めて重要な成果を上げることができた、と考えている。結論として、本研究計画は完璧に達成されたといえる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

1. Takuro Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Inventiones Mathematicae* 204 (2016), pp317-346. 査読有. DOI:10.1007/s00222-015-0615-7

2. Takuro Abe, Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge and Hiroaki Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *Journal of the European Mathematical Society* 18 (2016), Issue 6, pp1339-1348. 査読有. DOI:10.4171/JEMS/615

3. Takuro Abe and Hiroaki Terao, The freeness of ideal-Shi arrangements and free paths in affine Weyl arrangements. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 43 (2016), no. 1, pp33-44. 査読有. doi:10.1007/s10801-015-0624-z

4. Takuro Abe and Hiroaki Terao, Simple-root bases for Shi arrangements. *Journal of Algebra* 422 (2015), pp89--104. 査読有. doi:10.1016/j.jalgebra.2014.09.011

5. Takuro Abe, Roots of characteristic polynomials and intersection points of line arrangements. *Journal of Singularities*, 8 (2014), pp100--117. 査読有. DOI:10.5427/jsing.2014

6. Takuro Abe, Chambers of 2-affine arrangements and freeness of 3-arrangements. *Journal of Algebraic Combinatorics* 38 (2013), Issue 1, pp 65-78. 査読有.

doi:10.1007/s10801-012-0393-x

7. Takuro Abe and Masahiko Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials.

Mathematische Zeitschrift 275 (2013), Issue 3, pp911-919. 査読有. DOI: 10.1007/s00209-013-1165-6

8. Takuro Abe, Characteristic polynomials,  $\eta$ -complexes and freeness of tame arrangements.

The Michigan Mathematical Journal 62 (2013), no. 1, pp117-130. 査読有. doi:10.1307/mmj/1363958243

9. Takuro Abe, Hiroaki Terao and Atsushi Wakamiko, Equivariant multiplicities of Coxeter arrangements and invariant bases.

Advances in Mathematics 230 (2012), pp2364-2377. 査読有. doi:10.1016/j.aim.2012.04.015

〔学会発表〕(計 23 件)

1. Freeness and flags of hyperplane arrangements. Takuro Abe, Special Session on Topology and Combinatorics of Arrangements (in honor of Mike Falk), AMS Sectional Meeting, 2016 年 3 月 at Stony Brook University.

2. Divisional freeness and the second Betti number of hyperplane arrangements, Takuro Abe, Hyperplane arrangements and reflection groups 2015 年 8 月, at Leibniz University Hannover, Hannover, Germany.

3. Divisional freeness and the second Betti number of hyperplane arrangements, Takuro Abe, Differential and combinatorial aspects of singularities, 2015 年 8 月, at TU Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany.

4. Division free theorem for line arrangements and divisionally free arrangements of hyperplanes. Takuro Abe, Arrangements of plane curves and related problems, 2015 年 3 月, Tokyo Metropolitan University, Japan.

5. Division and localization of characteristic polynomials of

hyperplane arrangements. Takuro Abe, Combinatorics and Algebraic Topology of Configurations, 2015 年 2 月, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy.

6. Freeness and Geometry of line arrangements, Takuro Abe, Hokkaido University - University of Bremen Joint Symposium Special session: Arrangements of Hyperplanes 2014 年 12 月, University of Bremen, Bremen, Germany.

7. Recent developments on algebra of line arrangements", Takuro Abe, The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2014 年 8 月, Hokkaido University.

8. Intersection points and Betti numbers of line arrangements", Takuro Abe, Special session D-modules and Singularities at the First Joint International Meeting RSME-SCM-SEMA-SIMAI-UMI, 2014 年 7 月, The University of the Basque Country, Spain.

9. Intersection points and Betti numbers of the complements of line arrangements, Takuro Abe, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2014, 2014 年 3 月, Hiroshima University.

10. Roots of characteristic polynomials and intersection points of line arrangements, Takuro Abe, Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society, Special Session: Geometry and Topology of Arrangements of Hypersurfaces, 2013 年 6 月, "1 Decembrie 1918" University of Alba Iulia, Alba Iulia, Romania.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：

番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~abetaku/>

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

阿部拓郎 (ABE, Takuro)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究  
所・准教授

研究者番号：50435971

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：