

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740016

研究課題名(和文) 次数2の実解析的ジーゲル保型形式のL関数と構成に関する研究

研究課題名(英文) Studies on real analytic Siegel modular forms of degree 2--their L-functions and construction

研究代表者

森山 知則 (MORIYAMA, TOMONORI)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80384171

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式の構成に関して、古くから知られている調和多項式から定義されるtheta級数について不変式論の観点から検討した。具体的には、調和多項式を定義される際に用いられる格子の自己同型群に関して不変な調和多項式に制限しても得られるtheta級数の空間は v 小さくならないことは容易にわかるが、格子が E_8 格子の場合不変な調和多項式から楕円保型形式の空間への写像が重さが低いところでは単射となることが分かった(実際の計算は、大学院生の船田氏による)。

研究成果の概要(英文)：We investigate an old method of constructing the elliptic modular forms as theta series associated with harmonic polynomials from the viewpoint of invariant theory. More precisely, it is easy to see that the space of theta series does not lose any modular forms if we restrict the harmonic polynomials invariant under the automorphism group of the lattice involved. We observe that the linear map from $O(E_8, \mathbb{Z})$ -invariant E_8 -harmonic polynomials to the space of elliptic modular forms is injective for small weights. Note that the actual computation is done by Y. Funada, a master course student.

研究分野：整数論

キーワード：整数論 保型形式 テータ級数

1. 研究開始当初の背景

高度に構築された多変数実解析保型形式の対する L 関数の理論も、具体的な保型形式に適用することなしにはある意味で面白くない。この意味で、多変数の必ずしも正則とは限らない実解析保型形式の研究において身近な実例の不足が研究の進展のボトルネックとなっていると感じていた。

特に2次 Siegel 保型形式で無限素点で大きな離散系列表現を生成するものについては広く興味もたれ、またこれまでの研究の蓄積も大きい。したがって、これらを構成することは、保型形式論の今後の発展を鑑みると手始めになされるべき研究のように思われた。

またテータ級数一つとっても、近年では試料関数の存在のみで議論を進めることも多く、もっと具体的に試料関数を選択しての研究も特に低階の代数群の場合に行っておくことは有意義であると考えられる。

2. 研究の目的

上記の背景のもと、簡約 Lie 群の表現の分岐則から生ずる微分作用素やテータ対応を組み合わせて利用して多変数実解析保型形式の構成を行いたい。特に2次 Siegel 保型形式で無限素点で大きな離散系列表現を生成するものをテータ級数などを用いてなるべく具体的に構成し、その「フーリエ係数」を調べたい(これまでの研究代表者の研究によって実解析的な場合にも「フーリエ係数」が定義できることに注意しよう)。特に主要な算術部分群については次元公式も得られているので、微分作用素なども併用しながら与えられた算術部分群と与えられた重さ(=離散系列表現の Blattner parameter)を持つ保型形式をすべて構成したい。

3. 研究の方法

(1) テータ級数に関する準備的・補足的な研究として古くから研究されてきた正則保型形式の調和多項式による構成を格子の自己同型群の不変式を利用した「能率化」について調べる。すなわち格子(正定値2次形式)を与えて、それに関する調和多項式からテータ級数を構成されるが、ここで調和多項式を格子の自己同型群に関して不変なものに限っても得られる保型形式は目減りしないことがわかる。このような「能率化」は果たして optimal であるかという問題を考える。

(2) また、テータ対応の一般論では滑らかさのみを仮定した試料関数が用いられることが多いが、これに K -有限性をも要請した良い試料関数を探索する。すなわち、oscilator 表現の既約な部分商を函数レベルで捕まえる。これは具体的な実解析的保型形式の構成やその「フーリエ係数の決定」に有効であると思われる。

4. 研究成果

(1) 楕円正則保型形式の E_8 格子の自己同型群の不変式を利用した構成について、博士前期課程院生の船田氏の協力のもと調べた。重さが小さいところでは、上記能率化は「optimal」であることが判明した。一方、同様の現象が重が高いところでも一般にどの程度成り立つかどうかはなかなか難しい問題であるとの感触を得た。

同じく E_6 格子については、やはり博士前期課程院生の加藤氏とともに調べたが上記能率化は「最善」でないことが分かり、問題がそれほど単純ではないことが分かった。おそらく Hecke 作用素も絡めた形で問題を考えるのが良いと思われる。

なお、これらの研究を口頭発表した結果、類似の研究が階数2の格子についてなされていることを知ったのは有意義であった。

(2) K 有限性も要請したテータ対応の良い試料関数の探索は、いまだ道半ばであるが、ある程度探索の方針は立てられたように思う(詳細はここでは略する)。

(3) 微分作用素の構成に関しては、導来関手加群について習熟することが重要と思われるので基本的な文献に目を通して、近隣の研究者との勉強会でその概要を数回に分けて話した(しかし、具体的な微分作用素の構成に取り組むには至っていない)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

① 森山知則

Zuckerman tensoring as a computational tool 数理解析研究所講究録 1977, 121-131.(査読なし)

② 森山知則

p 進簡約群の調和解析の基礎 I: 行列成分, 二乗可積分表現, 緩増加表現
第 21 回整数論サマースクール報告集
(2004) 429-437
(査読なし)

[学会発表] (計 7 件)

① 森山知則

A Fourier expansion of automorphic forms on $Sp(2)$ and related real local problems,

第 19 回整数論オータムワークショップ, Archimedean local theory of automorphic forms,
2016.11.03
白馬ハイマウントホテル (長野県)

② 森山知則

周期の非消滅に関する Sun の結果の紹介,
RIMS 合宿型セミナー 「保型 L 関数の特殊値と付随する p 進 L 関数」
2016.09.21
京都府南丹市美山町 自然文化村.

③ 森山知則

Modular forms constructed from $O(E_8, \mathbb{Z})$ -invariant E_8 -harmonic polynomials
北陸数論セミナー,
2016.05.26
金沢大学サテライトプラザ.

④ 森山知則

Zuckerman tensoring as a computational tool
表現論および関連する調和解析と微分方程式,
2015.06.25
京都大学数理解析研究所.

⑤ 森山知則

Preliminary to derived functor modules: algebraic Borel-Weil-Bott theorem,
Structure of $L^2(G/H)$ -local Galois case--,
2014.03.28
岡山大学 理学部

⑥ 森山知則

p 進簡約群の調和解析の基礎 I: 行列成分, 二乗可積分表現, 緩増加表現
2013 年度整数論サマースクール,
2013.09.05
箱根高原ホテル(神奈川県)

⑦ 森山知則

On the failure of local multiplicity free theorems
金沢数論ミニ集会,
2012.11.30
金沢大学理工学域

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
森山 知則 (MORIYAMA TOMONORI)
大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号: 0384171

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：

(4) 研究協力者 ()