

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 2 日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740022

研究課題名(和文)高階導分を用いた多項式環の研究

研究課題名(英文)Study of polynomial rings using higher derivations

研究代表者

黒田 茂(Kuroda, Shigeru)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：70453032

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：多項式環に関する基本的な問題の多くが未解決のまま残されており，可換環論や代数幾何学における難問として組織的な研究が行われている．多項式環の研究では「次数」や「導分」の概念を基礎とする手法が有効だが，係数環が正標数の場合に適用できないことが多い．本研究では従来の手法に加えて「高階導分」を効果的に用いることで，正標数や任意標数の場合も含めて多項式環の諸問題を幅広く研究し，種々の進展を得た．

研究成果の概要(英文)：Many of the basic problems in polynomial ring are still unsolved, and are studied systematically as difficult problems in Commutative Ring Theory or Algebraic Geometry. In the study of polynomial rings, techniques based on degrees and derivations are effective, but are often not applicable to positive characteristic cases. In this research, we used "higher derivations" effectively in addition to the previous techniques. We studied wide range of problems in polynomial rings including positive or arbitrary characteristic cases, and obtained various new results.

研究分野：多項式環論，アフィン代数幾何学

キーワード：多項式環 正標数 高階導分 局所冪零導分 多項式自己同型 線形化問題 安定座標 アフィン代数幾何学

1. 研究開始当初の背景

多項式環は最も基本的な可換環の一つである。しかし、「消去問題」や「埋め込み問題」をはじめ、多項式環に関する基本的な問題の多くは現在も未解決のまま残されている。それらは可換環論や代数幾何学における難問として広く知られ、国内外で組織的な研究が繰り返されている。多項式環の研究が困難である大きな要因は、有効な手法が乏しいことにある。様々なアプローチによる研究が行われ、今世紀になってからもいくつかの特筆すべき進展があったが、依然として決定的に有効な手法は未確立と言ってよい。

多項式環の問題の多くは多項式環の自己同型と密接な関係があるため、多項式環の自己同型や自己同型群の研究は非常に重要である。これらは係数環の標数が0の場合に比べて正標数の場合の方が一般に難しく、不明な点も多い。例えば、体上の2変数多項式環の自己同型群の構造定理は標数0の場合が先に証明され、十数年後に正標数の場合が証明された。また、有名な永田予想も標数0の場合 Shostakov-Umirbaev によって2004年に解決されたが、正標数の場合は未解決である。多項式環に関する他の多くの問題についても同様のことが言える。正標数や任意標数の状況において、多項式環の研究は一般に難しく、解決すべき課題がたくさんある。

2. 研究の目的

多項式環の研究において、本質を的確に捉えるための効果的な手段を見出し、実際に活用しながらそれを発展させることは非常に重要である。研究代表者は従前の研究において、「導分」や「次数」を用いる手法を系統的に発展させ、種々の成果を得てきた。しかし、導分を基礎とする手法は係数環が正標数の場合にはあまり有効でない。この困難を解消するための自然な方法として、「高階導分」の活用が考えられる。本研究の主目的は、係数環が正標数の場合を睨みつつ、高階導分を用いる手法を交えながら多項式環の諸問題に取り組むことである。高階導分の中で特に重要なものに「局所有限反復高階導分」がある。これは加法群 G_a の作用と同値な概念であり、係数環が有理数体を含む場合は「局所冪零導分」とも同値な概念である。高階導分を用いる研究と密接な関係があるので、 G_a 作用や局所冪零導分に関連する研究も行う。高階導分は通常の導分の自然な一般化なので、導分の効果的な活用法も引き続き模索する。これらを基本的な戦略として、多項式環の諸問題に関する研究を総合的に行い、進展を図る。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者は多項式環の自己同型や導分の核の解析に関して独自の高度な技術を持っており、これらを有効活用しながら研究を進める。

(2) 関連分野の国内外の研究者たちと交流し、情報交換や議論、共同研究などを行いながら本研究課題に取り組む。必要に応じて海外の研究者を招へいしたり訪問したりする。

(3) 多項式環の研究を促進するために研究集会を主催する(「多項式環論セミナー」など)。また、国内外で開催される関連分野の研究集会などに参加し、情報収集や成果発表などを行う。特に、本研究課題と直接的に関係の深い「アフィン代数幾何学研究集会」には積極的に関与する。

4. 研究成果

(1) 本研究における特筆すべき成果の一つは、「上林の線形化問題」に関して、これまであまり進展のなかった有限アーベル群の場合に部分的な肯定解を与えたことである(雑誌論文[5])。「上林の線形化問題」は2次元以下の場合には肯定的に解決しているが、高次元では反例を与えられており、有限非可換群の反例も存在する。しかし、有限アーベル群に対する反例は見つかっておらず、有限巡回群の場合でも未解決である。有限巡回群に対する「上林の線形化問題」は広く知られた難問で、H. Kraft による“Challenging open problems in affine spaces”の中でも、8つの難問のうちの一つとして Zariski 消去問題やヤコビアン予想などと共に取り上げられている。正標数の場合の類似の問題に対しては浅沼が4次元の場合に反例を与えており、標数0の場合に比べて正標数の方が線形化は難しいと考えられる。

本研究では、体 k を含む単項イデアル整域 R 上の2変数多項式環への代数的群作用が、 R の商体上で対角化可能ならば R 上で対角化可能であることを示した。この結果の特別な場合として、 k が1の冪根を十分に含むとき、有限アーベル群の作用が線形化可能であることが従う。特に、 R が k 上の1変数多項式環ならば、上記未解決問題の3次元の場合に対する部分的な肯定解を与える。有限アーベル群に対する線形化問題は3次元以上ではこれまで実質的な進展がなかったため、この結果は重要な成果である。初めに与えた証明では、座標に関するある補題を証明するために高階導分の技法が用いられた。最終的にはより簡明な Sathaye の結果に置き換えられたが、高階導分は正標数の場合を扱う上で重要な手がかりを与えた。

なお、Kraft-Russell によって $k = \mathbb{C}$ の場合の類似の研究が少し先に行われていたが、我々の結果は基礎体が代数的閉体である必要がなく、標数の制約もない点が大きく異なる。そのため、この結果を k が有理関数体の場合などに適用することも可能であり、高次元における線形化問題の研究への活用も期待できる。この研究成果は、N. Gupta と S.M. Bhatwadekar を招待して開催したアフィン代数幾何学研究集会(2014年9月・首都大学東京)をはじめ、いくつかの国際会議など

で発表した。

(2) 多項式環に適当な次数構造を定め、多項式の最高次の斉次成分の性質を巧妙に利用する技法は、多項式環の研究でしばしば用いられる。理論から応用まで幅広く研究が行われているグレブナー基底もその一種である。Derksen - Hadas - Makar-Limanov 理論(以下、DHM 理論と略す)はこの観点から G_a 作用やその不変式を研究するための基本的な理論であり、様々な重要な結果に応用されている。2014年に N. Gupta は正標数の体上の Zariski 消去問題を否定的に解決したが、その証明でも鍵となる技法として DHM 理論が用いられた。また、 n 変数多項式環 $R[x_1, \dots, x_n]$ の任意の自己同型 σ に対し、 σ による $n-1$ 変数多項式環 $R[x_2, \dots, x_n]$ の像は、 $R[x_1, \dots, x_n]$ への G_a 作用による不変式環である。そのため、多項式環の自己同型の研究でも DHM 理論は重要な役割を果たす。多項式環の自己同型による変数の像は「座標」と呼ばれ、Abhyankar-Sathaye 予想をはじめ、多項式環の諸問題と深い関係を持つ。座標も G_a 不変式であるため、DHM 理論により最高次の斉次成分が特殊な形状になることが知られている。

ところで、座標の一般化として「安定座標」という概念があり、座標と同様に重要な研究対象である。しかし、安定座標は G_a 不変式とは限らないため、DHM 理論は安定座標に対して適用できない。そのため、安定座標の最高次の斉次成分が座標と同様の特徴を持つかどうか不明であった。

雑誌論文[10]では、安定座標なども扱えるようにするために、高階導分の技法を用いて DHM 理論の一般化を行った。この新たな理論を用いると、 G_a 不変式の一般化である「安定 G_a 不変式」も扱うことが可能である。それにより、安定座標の最高次の斉次成分が座標と同様の特徴を持つことが判明した。また、この理論では G_a 作用の一般化である「局所有限高階導分」(反復性を仮定しない)も扱える。このように、我々の理論は DHM 理論を大幅に一般化するものである。安定 G_a 不変式や安定座標なども G_a 不変式や座標と同様に重要な概念なので、この結果も DHM 理論のように種々の応用を持つことが期待される。本研究では、この結果を利用して多項式環の自己同型の重み付き多重次数の性質を証明した(雑誌論文[3])。

(3) 高階導分の利用はもともと「正標数」における現象の解明を大きな動機としており、本研究では正標数の整域上の多項式環の自己同型群の研究にも力を入れた。

係数環の標数が素数の場合の著しい特徴として、非線形な加法的自己同型の存在が挙げられる。ここで、 $R[x_1, \dots, x_n]$ の自己同型

が加法的であるとは、 σ から誘導されるアフィン空間の自己同型がベクトル群としての自己同型であるときにいう。本研究では、まず雑誌論文[13]で加法的自己同型に関する研究を行い、 R が体の場合の簡約可能性を

証明するとともに、 $n=2$ で R が体でないとき「野生」な加法的自己同型が常に存在することを示した。加法的自己同型は線形自己同型の一般化と見なせるため、「基本自己同型」と加法的自己同型で生成される部分群 $T'(n, R)$ は「順部分群」の一般化と見なせる。このとき、「順生成系問題」の類似として、 $T'(n, R)$ が自己同型群 $\text{Aut}_R(R[x_1, \dots, x_n])$ と等しいかが大きな問題となる。この問題を最初のテーマとして E. Edo (University of New Caledonia) と共同研究を開始したが、この共同研究は大きな発展を遂げ、色々な興味深い成果に結びついた。雑誌論文[6]において、まず上記問題の $n=2$ の場合を否定的に解決した。また、順部分群の別の自然な一般化で $T'(n, R)$ を含むもの(微分的順部分群)を新たに導入し、この群が $n=2$ のとき $T'(2, R)$ と $\text{Aut}_R(R[x_1, x_2])$ のどちらとも異なることを示した。さらに、 $\text{Aut}_R(R[x_1, x_2])$ のあるクラスの部分群たちの構造を詳細に記述するための方法も与えた。これらの研究成果は、正標数の整域上の多項式環の自己同型群の部分群の研究に新たな方向性を与えるものとして大きな意義がある。実際、この研究を基礎にして行った $\text{Aut}_R(R[x_1, \dots, x_n])$ の部分群の代数幾何的構造に関する共同研究でも、新たな成果が得られている(論文は準備中)。こうした一連の研究成果は、未解明な部分の多い正標数の整域上の多項式環の自己同型や自己同型群に対する理解を深める上で大きな前進である。

(4) 高階導分や局所冪零導分、多項式自己同型などの知識を活用し、ザリスキ消去問題やアフィン空間の埋め込み問題、Hilbert の第 14 問題などの研究で種々の進展を得た。雑誌論文[8]では G_a 作用を許容する整域に関する中井の定理を一般化し、それを用いて 2 次元素元分解整域の消去問題に対する Crachiola の定理を一般化した。雑誌論文[11]では多項式自己同型に関する知識を活かし、アフィン直線のアフィン空間への埋め込みがいつ rectifiable であるかという問題に対して興味深い肯定解を与えた。雑誌論文[1]は G. Freudenburg を招へいして行った共同研究による成果で、Hilbert の第 14 問題に関連して局所冪零導分の無限生成な核の構造の詳細な記述に成功した。この論文では、ある種の有限生成でない代数の構造を記述するために「ケーブル代数」の概念を新たに導入した。雑誌論文[4]でも Hilbert の第 14 問題に関する研究を行い、スライスを持つ導分の核に対する van den Essen の予想を肯定的に解決した。雑誌論文[2]は Edo-Poloni の最近の結果の一般化である。Edo-Poloni は野生自己同型に退化する 3 変数順自己同型の族を構成し、3 変数の順部分群が 3 変数の多項式環の自己同型群の閉部分群でないことを示した。本論文では局所冪零導分から定まる指数自己同型についての知識を活用して、このような現象が起こる機構を解明し、より簡単な方法で

同様の例を組織的に構成できることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

[1] Gene Freudenburg, Shigeru Kuroda
Cable algebras and rings of Ga-invariants,
Kyoto J. Math. 掲載決定, 査読有

[2] Shigeru Kuroda
Degeneration of tame automorphisms of a
polynomial ring, Comm. Algebra 44 (2016),
no. 3, 1196-1199. 査読有
DOI : 10.1080/00927872.2014.999935

[3] Shigeru Kuroda
Weighted multidegrees of polynomial
automorphisms over a domain, J. Math. Soc.
Japan 68 (2016), no. 1, 119-149. 査読有
DOI : 10.2969/jmsj/06810119

[4] Shigeru Kuroda
Van den Essen's conjecture on the kernel
of a derivation having a slice, J. Algebra
Appl. 14 (2015), no. 9, 11 pp. 査読有
DOI : 10.1142/S0219498815400034

[5] Shigeru Kuroda
Subgroups of polynomial automorphisms
with diagonalizable fibers, J. Algebra 435
(2015), 159-173. 査読有
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2015.04.011

[6] Eric Edo, Shigeru Kuroda
Generalisations of the tame automorphisms
over a domain of positive characteristic,
Transform. Groups 20 (2015), no.1, 65-81.
査読有
DOI : 10.1007/s00031-014-9288-3

[7] Shigeru Kuroda
On the Karaš type theorems for the
multidegrees of polynomial automorphisms,
J. Algebra 423 (2015), 441-465. 査読有
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2014.10.024

[8] Shigeru Kuroda
A generalization of Nakai's theorem on
locally finite iterative higher deriva-
tions, arXiv:1412.1598 [math.AC], 1-7,
2014 年, 査読無

[9] Shigeru Kuroda
How to prove the wildness of polynomial
automorphisms: an example, in *Automor-
phisms in birational and affine geometry*,
Springer Proceedings in Mathematics &
Statistics Vol.79, 2014, 381-386. 査読有
DOI : 10.1007/978-3-319-05681-4_21

[10] Shigeru Kuroda
Initial forms of stable invariants for
additive group actions, Transform. Groups
19 (2014), no.3, 853-860. 査読有
DOI : 10.1007/s00031-014-9271-z

[11] Shigeru Kuroda

The Nagata type polynomial automorphisms
and rectifiable space lines. Comm. Algebra
42 (2014), no. 10, 4451-4455. 査読有
DOI : 10.1080/00927872.2013.813950

[12] Shunichi Kimura, Shigeru Kuroda,
Nobuyoshi Takahashi
The closed cone of a rational series is
rational polyhedral, J. Algebra 405 (2014),
243-258. 査読有
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2014.02.007

[13] Shigeru Kuroda
Elementary reducibility of automorphisms
of a vector group, Saitama Math. J. 29
(2012), 79-87. 査読有

[学会発表](計 28 件)

(1) Shigeru Kuroda
Degeneration of tame automorphisms of a
polynomial ring, 専題学術報告, 吉林大学,
長春(中国), 2015 年 9 月 14 日

(2) Shigeru Kuroda
Polynomial automorphisms of characteris-
tic order, 第 13 回アフィン代数幾何学研究
集会, 関西学院大学(大阪・梅田), 2015 年
3 月 5 日

(3) 黒田 茂
Nonlinear cyclic modular invariant rings
for additive group actions, 第 5 回多項式
環論セミナー, 首都大学東京(東京・八王子
市), 2015 年 1 月 11 日

(4) 黒田 茂
A generalization of Nakai's theorem on
locally finite iterative higher deriva-
tions, 第 5 回多項式環論セミナー, 首都大
学東京(東京・八王子市), 2015 年 1 月 10 日

(5) 黒田 茂
Lnd-automorphisms and the Linearization
Problem, 第 36 回可換環論シンポジウム, IPC
生産性国際交流センター(神奈川・葉山町),
2014 年 11 月 22 日

(6) 黒田 茂
多項式環の順自己同型の退化, 代数学・数学
基礎論研究会, 静岡大学(静岡・駿河区),
2014 年 11 月 5 日

(7) Shigeru Kuroda
Linearizing actions of diagonalizable
groups, アフィン代数幾何学研究集会, 首都
大学東京国際交流会館(東京・八王子市),
2014 年 9 月 13 日

(8) Shigeru Kuroda
Linearizing Actions of Diagonalizable
Groups, 2014 代数学研討会, 吉林大学, 長春
(中国), 2014 年 8 月 25 日

(9) Shigeru Kuroda
Lnd-automorphisms and the Linearization
Problem, International Conference on Af-
fine Algebraic Geometry & the Jacobian
Conjecture, 南開大学, 天津(中国), 2014
年 7 月 24 日

(10) Shigeru Kuroda

End-automorphisms and the Linearization Problem, Kyoto Workshop on Algebraic Varieties and Automorphism Groups, 京都大学数理解析研究所(京都・左京区), 2014年7月10日

(11) 黒田 茂

多項式環の研究, One-day Workshop around Algebraic Combinatorics, 高知大学(高知・高知市), 2014年6月7日

(12) 黒田 茂

The automorphism group of an integral domain over the kernel of a locally nilpotent derivation, 日本数学会年会, 代数学分科会一般講演, 学習院大学(東京・目白区), 2014年3月15日

(13) 黒田 茂

対称性を持つ局所冪零導分と線形化問題, 第4回多項式環論セミナー, 首都大学東京(東京・八王子市), 2014年1月26日

(14) Shigeru Kuroda

The automorphism group of a UFD over the kernel of a locally nilpotent derivation, 第35回可換環論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所(京都・左京区), 2013年12月3日

(15) 黒田 茂

Newton polytopes of stable invariants for additive group actions, 第12回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学(大阪・梅田), 2013年9月6日

(16) 黒田 茂

The automorphism group of a UFD over the kernel of a locally nilpotent derivation, 第3回多項式環論セミナー, 静岡大学(静岡・駿河区), 2013年8月6日

(17) 黒田 茂

任意標数の体上の Shestakov-Umirbaev 不等式, 代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学, 2013年3月26日

(18) 黒田 茂

整域上の多項式環の順自己同型の一般化, アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学(大阪・梅田), 2013年3月3日

(19) Shigeru Kuroda

How to use the Shestakov-Umirbaev theory effectively, Part I, Part II (連続講演), Algebra Seminar, Indian Statistical Institute, カルカッタ(インド), 2013年2月21日, 22日

(20) Shigeru Kuroda

Generalizations of the tame automorphisms of a polynomial ring over a domain of positive characteristic, Monday Colloquium, Indian Statistical Institute, (カルカッタ(インド)), 2013年2月18日

(21) 黒田 茂

The Shestakov-Umirbaev inequality over a field of arbitrary characteristic, 都の都代数幾何学研究集会, 東北大学(宮城・仙台市), 2013年2月15日

(22) 黒田 茂

多項式環、侮るべからず, 広島大学数学専攻談話会, 広島大学(広島・東広島市), 2012年12月4日

(23) Shigeru Kuroda

The Shestakov-Umirbaev inequality over a field of arbitrary characteristic, 第34回可換環論シンポジウム, IPC 生産性国際交流センター(神奈川・葉山町), 2012年11月25日

(24) Shigeru Kuroda

Wild automorphisms of a polynomial ring in three variables, Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry, CIRM, トレント(イタリア), 2012年10月31日

(25) 黒田 茂

多項式環の野生自己同型, 日本数学会, 秋季総合分科会, 代数学分科会特別講演, 九州大学(福岡・福岡市), 2012年9月21日

(26) 黒田 茂

多項式自己同型の多重次数に関する Karas 型定理, アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学(大阪・梅田), 2012年9月8日

(27) 黒田 茂

整域上の多項式自己同型の重み付き多重次数, 第2回多項式環論セミナー, 静岡大学(静岡・駿河区), 2012年8月20日

(28) Shigeru Kuroda

The Shestakov-Umirbaev inequality over a field of arbitrary characteristic, International Conference on Affine Algebraic Geometry and Related Topics, 吉林大学, 長春(中国), 2012年8月3日

〔その他〕

Shigeru Kuroda

Recent developments in polynomial automorphisms: The solution of Nagata's conjecture and afterwards, Sugaku Expositions, 掲載決定

(多項式環の自己同型に関する解説記事)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

黒田 茂 (KURODA, Shigeru)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号: 70453032

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし