科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ２６ 年 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2013
課題番号：２４７４００２４

研究課題名（和文）ワイル群多重ディリクレ級数に対する可解格子模型表示

研究課題名（英文）Expression of the Weyl group multiple Dirichlet series with a solvable lattice models

研究代表者
中筋 麻貴（Nakasuji, Maki）

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：３０６０９８７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円、（間接経費） 480,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，可解格子模型に対するYang-Baxter方程式の有用性について考察した．具体的には，Schur関数の変数を拡張したFactorial Schur function をYang-Baxter方程式を用いることにより，可解格子模型で記述することに成功した．またその応用として，Factorial Schur関数について報告されていた従来結果に別証明を与えた．
一方，半単純代数群のIwahori部分群に対して不変となる主系列表現の基底であるCasselman基底の明示公式の解明に取り組み，Hecke環の特殊化に関係するYang-Baxter基底を用いた表示を与えることに成功した．

研究成果の概要（英文）：In this study, we considered the application of the Yang-Baxter equation developed to a large extent in the context of solvable lattice models in statistical mechanics. As a result, we obtain the expression of a factorial Schur function which is generalizations of Schur functions that have, in addition to the usual variables, a second family of shift parameters, as the partition function of a particular statistical mechanical system with using the Yang-Baxter equation. Further, using our methods, we gave thematic proofs of many of the properties of factorial Schur functions.
On the other hand, we investigated certain basis of Iwahori fixed vectors of a spherical representation of a split semisimple group over a nonarchimedean local field, called Casselman basis. And we obtained the new expression of that with using Yang-Baxter equation associated to the specializations of the Hecke algebra.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，代数学

キーワード：ワイル群多重ディリクレ級数　Casselman基底　Yang-Baxter方程式　Factorial Schur 関数

１．研究開始当初の背景

表現論および整数論の分野において発展したきたメタプレクティック理論は，2006年にB.Brubaker, D. Bump, Chinta, S. Friedberg, J. Hoffstein(Proc. Stmps. Pire Math., 75, 2006)によって導入されたワイル群に関係する多変数のディリクレ級数 (「ワイル群多重ディリクレ級数」，以下WMD級数と記す)によって，急速に研究が進展している．特に，このWMD級数が，メタプレクティック群上に定義されるEisenstein級数のWhittaker関数と一致すること（同値関係）が期待されるため，同値関係の証明とともに，その性質の解明について研究が進められている．近年の研究の結果，A型のワイル群については，様々な手法を用いることでこの同値関係が証明された．その手法には，[1]表現論における手法(Chinta-Gunnells, Invent. Math., 167 (2), 2007)のみならず，[2]量子群の結晶基底を用いた組合せ論による手法(Brubaker-Bump-Friedberg, Annals of Math.2011)や[3]可解格子模型に対するYang-Baxter方程式を用いた統計物理的手法 (Brubaker-Bump-Chinta-Friedberg-Gunnells)が含まれる．保型形式理論に組合せ論的表現論が適用されたことはこれまでになく，本研究に[2]および[3]の手法が適用された意義は極めて大きい．

一方，半単純代数群G (p進群)のIwahori部分群に対して不変となる主系列表現の基底であるCasselman基底(Casselman, Compositio Math.,40, 1980)は,ワイル群の元に依り，研究代表者はこれが表現論において研究対象であるKazhdan-Lusztig多項式に特長づけられることを発見し，ルート系の分類ではなく，Kazhdan-Lusztig多項式に関連する条件で分類された具体的な明示公式の予想(Bump-Nakasuji予想)を与えた．

２．研究の目的

A型ワイル群における同値関係の証明[3]に用いた可解格子模型に対するYang-Baxter方程式に対する理解を深め，この性質を応用することで，保型表現論の分野で定義されるワイル群多重ディリクレ級数(WMD級数)の性質を解明する．

本研究の第1の目的は，可解格子模型の特長であるYang-Baxter方程式を用いた応用を考察することにより，従来研究の同値性の証明だけに限らない，Yang-Baxter方程式の他への有用性を示すことである．

第２の目的は，可解格子模型理論を解析数論やシューベルトカリキュラスにおいて報告された結果と対応させることである．これらは，ワイル群多重ディリクレ級数の解明という本研究の目的に直結するだけでなく，表現論と解析数論，組合せ論，量子群といった各領域をつなげる画期的な研究となることから，今後の研究への応用が期待される．

３．研究の方法

(1) A型ワイル群に対するWMD級数の研究すなわち同値関係の証明[3]では，関数の性質の鍵となったSchur関数を可解格子模型を用いて記述し，Yang-Baxter方程式を用いることで，主定理が導かれる．そこで，第１の目的に対する研究として，Schur関数の変数を，スペクトルパラメータ z_i に加え，別のパラメータ α_i を増やすことによって拡張したFactorial Schur functionについて同様の研究を行った．また，新たに増やしたパラメータ α_i に対するYang-Baxter方程式について考察した．

(2) 第２の目的に対し，シューベルトカリキュラスの研究に可解格子模型理論を導入する．具体的には，Ikeda-Naruseによって導入されたExcited Young diagramと可解格子模型の関係を明らかにし，その対応を用いることによりシューベルトカリキュラスにおいて解明された事柄が意味するものを可解格子模型における現象としてとらえる．

(3) 第１および第２双方の目的と関連して，研究代表者の従来研究の結果であるBump-Nakasuji予想がHecke環を用いて部分的に解決されていること，およびHecke環に定義される基底(Yang-Baxter基底)がYang-Baxter方程式を満たしていることから，Yang-Baxter基底とBump-Nakasuji予想の関係について考察した．

４．研究成果

(1) 米国Stanford大学のD.Bump教授およびP.McNamara氏との共同研究により，A型ワイル群に対するWMD級数の同値関係の証明で用いられた統計物理的手法の拡張に取り組んだ．具体的には，Schur関数の変数を，スペクトルパラメータ z_i に加え，別のパラメータ α_i を増やすことによって拡張したFactorial Schur 関数

$$s_\lambda(z\,|\,\alpha) = A_{\lambda+\delta}(z\,|\,\alpha)/A_\delta(z\,|\,\alpha)$$

について同様の研究を行った．ここで，$(z|\alpha)^r=(z+\alpha_1)\cdots(z+\alpha_r)$, $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ としたとき，$A_\mu(z|\alpha)$は, $A_\mu(z|\alpha)=\det((z_i|\alpha)^{\mu_j})_{i,j}$を表す．

変数の増加によって生じた問題に対して，ウエイトの取り方に工夫を施すことにより，Factorial Schur関数を可解格子模型で記述することに成功し，以下の定理を得た．

定理1.

$$[\prod_{i<j}(tz_j+z_i)]s_\lambda(z\,|\,\alpha) = Z(G_{\lambda,t})$$

ここで，$Z(G_{\lambda,t})$ はsix vertex model $G_{\lambda,t}$ のpartition functionを表す．

またその応用として，スペクトルパラメータ z_i に対する対称性を得ることによって，

Factorial Schur関数について報告されていた従来結果である以下のMacdonald公式(In Seminaire Lotharingien de Combinatorie, 498 of Publ. Inst. Rech. Math. Av., 1992)および Vanishing Theorem (SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 3, 2007)に別証明を与えた.

定理2(Macdonald公式). Partition λに対し，以下が成り立つ.

$$s_\lambda(z \mid \alpha) = \sum_T (z \mid \alpha)^T$$

ここで，Tはshapeがλのsemistandard Young tableauをわたる.

定理3(Vanishing Theorem).

$$s_\lambda(-\alpha_\mu \mid \alpha) = \begin{cases} 0 & (\lambda \not\subset \mu) \\ \prod (\alpha_{n-i+\lambda_i+1} - \alpha_{n-\lambda_j'+j}) & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

以上の研究はSchur関数に対する先行研究の類似である．一方，Schur関数がスペクトルパラメータのみを持つ関数であることに対し， Factorial Schur関数は，スペクトルパラメータz_iと別のパラメータα_iの２変数で記述されており，Macdonald(In Seminaire Lotharingien de Combinatorie, 498 of Publ. Inst. Rech. Math. Av., 1992)は，パラメータα_iに対する対称性の可能性についても主張していた．これに対し，本研究ではパラメータα_iに応用可能なYang-Baxter方程式を証明することに成功した．またその応用として，Dual Cauchy Identityについて可解格子模型を用いて証明を与えた.

定理4.
$x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_m)$を２つの有限変数としたとき，以下が成り立つ.

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i + y_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x \mid \alpha) s_\lambda(y \mid -\alpha)$$

本研究により，WMD級数の研究で用いられたYang-Baxter方程式の他への有用性を示すことができ，本研究の第１の目的を達成することができた.

(2) 岡山大学成瀬弘教授との共同研究により，Bump-Nakasuji予想の解明に取り組んだ.
Casselman基底は，半単純代数群G (p進群)のIwahori部分群に対して不変となる主系列表現の基底であり，intertwining operatorの双対として記述される．具体的には，u, vをワイル群Wの元，M_wをintetwining operatorとしたときに

$$M_w f_v(1) = \begin{cases} 1 & (w = v) \\ 0 & (w \neq v) \end{cases}$$

で定義される基底$\{f_w\}$である．ここでは，$M_w f_v(1)=m(u,v)$と書き，この明示公式を得る事が問題であり，Bump-Nakasuji予想は実際に$m(u,v)$をコンピュータ(数式処理ソフト，SAGE)を用いて計算することによって得られた予想式であり，ワイル群の元についてKazhdan-Lusztig多項式を用いた条件を付加している．本研究では，$m(u,v)$の個々の値と，Hook定理の拡張(Naruse,日本数学界2011年度会アブストラクト)から得られる値との関係について，コンピュータ(SAGE)を用いてすべて型のワイル群にわたる様々な組合せについて検討し，共通の法則を見つけ定式化を行った．具体的には，$m(u,v)$をKostant-Kumarのξ関数を用いて条件を与えたBruhatグラフを用いた記述を得た.
なお，NaruseによるHook定理の拡張はコホモロジーを用いて記述されており，定式化には，まずこれをK-理論の言葉に書き下す必要があった.

また，研究代表者と米国Stanford大学D.Bump教授による先行研究ではHecke環を用いることにより，Bump-Nakasuji予想の一部が証明されている．一方，Whittaker関数とシューベルトカリキュラスの関係構築の研究として，Demazure作用素を用いた別の研究(Brubaker-Bump-Licata, 2012)が報告されていることから，定式化した予想式についてHecke環およびDemazure作用素を用いる事により証明を与え，得られた結果を用いることにより，同変K-理論を用いて幾何学的な解釈に取り組み，同変K-理論での同変Chevalley公式との関係づけを行った.

以上の研究結果から，BN予想のKazhdan-Lusztig多項式による仮定部分がシューベルト多様体の特異点に対する条件で分類されることが示唆され，Bump-Nakasuji予想 を改善するに到った．また本研究の第2の目的を達成することができた.

(3) 引き続き，岡山大学成瀬弘教授との共同研究により，Bump-Nakasuji予想の解明にHecke環を用いた研究に取り組んだ．先行研究により，Iwahori部分空間Jに対する主系列表現$V(\chi)^J$からHecke環Hへのベクトル空間において同形となる写像$\alpha(\chi)$を定義し，さらに次が可換となるような写像$\mathcal{M}_w$を定義する.
ここで，M_wは[2]で定義したintertwining operatorを表す.

$$\begin{array}{ccc} V(\chi)^J & \xrightarrow{M_w} & V({}^w\chi)^J \\ \downarrow \alpha(\chi) & & \downarrow \alpha({}^w\chi) \\ H & \xrightarrow{\mathcal{M}_w} & H \end{array}$$

Hecke環の単位元1_Hの$\mathcal{M}_w$によって移された元を$\mu_z(w)$と書いたとき，本研究では次の定理を得た.

定理5.
$\mu_z(w)$はYang-Baxter基底である．

ここでYang-Baxter基底とは，Hecke環に定義される基底でYang-Baxter方程式を満たしているものを意味する．

一方，Yang-Baxter基底はHecke環のgenerator$\{h_w\}$($w\in W$)の和に展開することができる．すなわち定理5より係数を$P(u,w)$とすると，

$$\mu_z(w^{-1}) = \sum_{u\leq w} P(u,w)h_u$$

と表すことができる．
これを従来研究の$m(u,v)$のHecke環による記述と対応させることにより，次の定理を得ることができた．

定理6.
$$m(u^{-1},v^{-1}) = \sum_{u\leq z\leq v} P(z,v)$$
本結果は，Bump-Nakasuji予想に対する大きな 進展となった．

(4)今後の展望
WMD級数に関する研究については，同値関係を完全にするために，A型以外のルート系(B型，C型，D型)についてその性質を解明する必要がある．しかし，従来研究では，A型の特長を利用しているためそのまま適用することができない．このため，各ルート系に適した新しい手法を導入する必要がある．この手法の決定が一つの課題である．一方，Factorial Schur関数については，シューベルトカリキュラスの分野における発展が目覚ましく，様々な研究結果が報告されている．そこで，シューベルトカリキュラスの分野における手法を用いてWMD級数の解明に応用することがもう一つの課題である．
本研究では，可解格子模型の応用をテーマに，これらの課題に取り組んだ．この結果，本研究の目的を達成することによって これらの課題に対して画期的な成果を得る事ができた．本研究は，Bump-Nakasuji予想の解明を中心に，さらなるWMD級数の解明への貢献が期待できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）
① Daniel Bump, Peter J. McNamara, <u>Maki Nakasuji</u>, Factorial Schur Functions and the Yang-Baxter Equation, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, 査読有，掲載決定.

② <u>中筋麻貴</u>，Gindikin-Karpelevich formuaの拡張とIwahori-Hecke algebra, 「第六回数論女性の集まり」報告集，査読無，1, 2013, 36-44.

③ <u>中筋麻貴</u>，Six vertex modelとdual Cauchy identity, 「第五回数論女性の集まり」報告集，査読無，1, 2012, 29-34.

④ <u>中筋麻貴</u>，Casselman基底に対する明示公式，津田塾大学数学・計算機科学研究所研究報告集，査読無，1, 2012, 41-48.

〔学会発表〕（計　3　件）
① <u>Maki Nakasuji</u>, Casselman's basis and Schubert calculus-from computer evidence, Whittaker Functions: Number Theory, Geometry, and Phisics, 2013年10月18日，Banff International Research Station.

② <u>中筋麻貴</u>，Gindikin-Karpelevich formulaの拡張，研究集会「第六回数論女性の集まり」，2013年6月1日，早稲田大学.

③ <u>中筋麻貴</u>，Six vertex modelとdual Cauchy identity, 研究集会「第五回数論女性の集まり」，2012年5月19日，早稲田大学.

６．研究組織
(1)研究代表者
中筋　麻貴（NAKASUJI, Maki）
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号：30609871