

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 24 日現在

機関番号：32629

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740025

研究課題名(和文)実簡約群上の球関数とアルキメデスゼータ積分

研究課題名(英文)spherical functions on real reductive groups and archimedean zeta integrals

研究代表者

石井 卓(Ishii, Taku)

成蹊大学・理工学部・准教授

研究者番号：60406650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式に付随するゼータ関数(保型L関数)の解析的性質をその積分表示によって明らかにするために、実簡約群上の一般化された球関数の積分変換であるアルキメデス素点における局所ゼータ積分を、球関数の明示公式を導出して具体的に計算した。その結果、 $GL(n)$ 、 $GSp(2)$ 上のいくつかの保型L関数に対して、正則性、極の位置、関数等式といった基本的な性質を明らかにした。特に、 $GL(n)$ 上の2次外積L関数、 $GL(3) \times GL(2)$ 上のL関数に対しては、局所ゼータ積分が期待されるL因子(ガンマ関数の積)と一致するような表現空間内のベクトルの組を明示的に与えた。

研究成果の概要(英文)：The aim of our study is to establish analytic properties of automorphic L-functions via the integral representations method. We compute the archimedean zeta integrals which are the integral transforms of generalized spherical functions on real reductive Lie groups. As a consequence we prove the entireness, the location of possible poles and functional equations for some automorphic L-functions on $GL(n)$ and $GSp(2)$. Especially we show the coincidence of archimedean zeta integrals and the expected L-factors (product of Gamma functions) for the exterior square L-functions on $GL(n)$ and the standard L-functions on $GL(3) \times GL(2)$.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 保型L関数 Whittaker関数 アルキメデスゼータ積分

1. 研究開始当初の背景

保型形式に付随するゼータ関数(保型L関数)の解析的性質を積分表示によって調べるといふ研究手法は Riemann、Hecke にまで遡るものであるが、1970年代から80年代にかけて、Godement、Jacquet、Langlands、Piatetski-Shapiro、Shalika らによって一般線形群 $GL(n)$ の保型L関数の積分表示による研究が大きく進展した。また保型L関数は、他の数論的なゼータ関数と密接に関係していると信じられており、実際にその繋がりを明らかにすることにより、Fermat 予想、Sato-Tate 予想が解決された。そのような観点からも保型L関数は現代の整数論において極めて重要な位置を占めている。

さて1980年代以降これまでに様々な保型L関数の積表示が発見され続けてきた。しかしそれらの研究においては、アルキメデス素点や悪い有限素点における局所ゼータ積分の解析が十分ではなく、部分L関数の結果に留まるものが多い。そのような状況を打破するべく、1990年代以降、織田孝幸氏や周辺の人たちを中心に実簡約群上の一般化された球関数の明示公式の研究が活発に進められてきた。とりわけ実2次斜交群 $GS(2, R)$ やユニタリ群 $SU(2, 2)$ の様々な既約許容表現に対して、Whittaker 関数、一般化 Whittaker 関数、行列係数といった一般化された球関数の明示公式が蓄積されてきた。さらにその応用として、森山知則氏や研究代表者によって、これら特殊関数の積分変換であるアルキメデスゼータ積分を具体的に計算することにより、 $GS(2)$ 上のスピノールL関数の正則性や大域関数等式が証明された。

また簡約群上のクラス1主系列表現に対しては、Stade や研究代表者によって $GL(n, R)$ や奇数次直交群 $SO(n+1, n)$ 上のクラス1 Whittaker 関数の明示公式が与えられ、アルキメデスゼータ積分が計算されていた。

2. 研究の目的

保型L関数の性質を調べる二大手法の一つと知られる、保型L関数の積分表示による方法(いわゆる Rankin-Selberg 法)により、保型L関数の大域的な性質を明らかにすることを目標とする。これまでに様々なL関数に対して、その積分表示が発見されているが、アルキメデス素点における解析が十分になされているものは極めて少ない。すなわち多くの先行研究においては、不分岐素点にお

ける局所ゼータ積分と局所L因子の一致を示すのみで、積分表示と部分L関数を関連付けるに留まる。本研究では、実簡約群上の特殊関数の明示公式を与えて、アルキメデスゼータ積分を具体的に計算することにより、完備化された大域的L関数の正則性や極の位置、関数等式といった基本的かつ重要な性質を導き出すことを目的とする。

3. 研究の方法

実簡約群 G の既約表現 に対する一般化された球関数(G 上の特殊関数)の積分変換であるアルキメデスゼータ積分の計算を次のような段階を踏んで行う。

- (1) G の極大コンパクト部分群 K の既約表現の具体的実現、とくに Clebsch-Gordan 係数などを詳細に調べ、 $(\text{Lie}(G), K)$ 加群としての構造を記述する。
- (2) 一般化された球関数を特徴づける偏微分方程式系を導出し、その解の積分表示、とりわけ Mellin-Barnes 型積分表示を求める。
- (3) 球関数の積分変換である局所ゼータ積分を計算し、期待されるべき局所L因子(= G の Langlands パラメータから決まるガンマ関数の積)を取り出し、局所関数等式を示し、大域的なL関数についての基本的性質を得る。

4. 研究成果

以下のような保型L関数に対して、関連するアルキメデスゼータ積分の計算を行った。

(1) $GL(n)$ 上の2次外積L関数

Bump, Friedberg (1990)によって発見された $GL(n)$ 上の複素2変数のゼータ積分は、不分岐有限素点において標準L関数と2次外積L関数の積になることが知られていた。さらに Stade(2000)は無有限素点においてクラス1主系列表現を生成している場合に、アルキメデスゼータ積分とアルキメデスL因子の一致を示した。この結果を〔雑誌論文〕で得られた Whittaker 関数の明示公式を用いて、 $GL(n, R)$ の極小放物部分群から誘導された一般の主系列表現に対する場合に拡張した。この結果は、次項の〔学会発表, 〕等で講演し、“Archimedean zeta integrals for exterior square L-functions on $GL(n)$ ”と

して論文にまとめ投稿した。

(2) $GL(3) \times GL(2)$ 上の標準 L 関数

$GL(3), GL(2)$ の尖点保型表現の無限素点成分に現れる既約表現の全ての組に対して、Jacquet, Shalika, Piatetski-Shapiro によるゼータ積分を計算し、アルキメデスゼータ積分がアルキメデス L 因子 (ガンマ関数 6 個の積) と一致するような Whittaker 関数の組を見つけた。本研究は平野幹氏 (愛媛大学)、宮崎直氏 (北里大学) との共同研究である。この結果は〔雑誌論文〕で出版された。

(3) $GSp(2, R)$ 上のスピノール L 関数

$GSp(2, R)$ の Siegel 放物部分群から誘導された一般主系列表現に対する Whittaker 関数の特徴づける偏微分方程式系は長谷川泰子氏 (2011) によって与えられていた。この偏微分方程式系を主系列表現の Whittaker 関数の偏微分方程式系と関連づけることにより解の Mellin-Barnes 型積分表示を与えた。この結果、Whittaker 模型を持つような $GSp(2, R)$ の既約表現に対する Whittaker 関数の明示公式が全ての場合に得られたことになる。さらに応用として Novodvorsky のゼータ積分を計算し、スピノール L 関数の局所関数等式を示した。森山知則氏、宮崎直氏、研究代表者の先行研究と併せると、 $GSp(2)$ の大域的 Whittaker 模型を持つような保型表現に対するスピノール L 関数の正則性、大域関数等式が確立されたことになる。この結果については〔学会発表の ~〕で発表した。

(4) $GL(n)$ の標準 L 関数

$GL(n)$ の標準 L 関数に対する Godement-Jacquet 積分については、すべての素点において L 因子が局所ゼータ積分の和で書かれることが知られている。複素素点において主系列表現を生成している場合に、アルキメデスゼータ積分を具体的に計算し、局所ゼータ積分と局所 L 因子が一致するような表現空間内のベクトルを明示的に与えた。この結果は〔学会発表〕において発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Miki Hirano, Taku Ishii and Tadashi Miyazaki, The archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$, Proceedings of the Japan Academy, Vol. 92, Ser. A, No. 2 (2016), 27-32, 査読有, DOI:10.3792/pjaa.92.27

Taku Ishii and Takayuki Oda, Calculus of the principal series Whittaker functions on $SL(n, R)$, Journal of Functional Analysis 266 (2014), 1286-1372, 査読有, DOI: 10.1016/j.jfa.2013.11.020

Taku Ishii, Whittaker functions on orthogonal groups of odd degree, Journal of Lie Theory 23 (2013), 85-112, 査読

有, <http://www.heldermann.de/JLT/JLT23/jlt23.htm>

Taku Ishii and Eric Stade, Archimedean zeta integrals on $GL_n \times GL_m$ and $SO_{2n+1} \times GL_m$, Manuscripta Mathematica 141 (2013), 485-536, 査読有, DOI: 10.1007/s00229-012-0581-y

〔学会発表〕(計 11 件)

Taku Ishii, Whittaker functions on $Sp(2, R)$ and archimedean zeta integrals, 保型形式・保型的 L 関数とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 2 月 1 日.

Taku Ishii, Whittaker functions on $Sp(2, R)$ and archimedean zeta integrals, Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis, 東京大学数理科学研究科, 2015 年 12 月 17 日.

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for generic cusp forms on $GSp(2)$, Kyoto conference on automorphic forms, 京都大学, 2015 年 6 月 28 日.

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for $GSp(2)$, Number theory seminar, Colorado University, 2015 年 5 月 15 日.

石井 卓, Whittaker functions on $Sp(2, R)$ and archimedean zeta integrals, 保型形式セミナー, 上智大学, 2015 年 3 月 14 日.

石井 卓, Godement Jacquet zeta integrals on $GL(n, C)$, 愛媛大学整数論三二研究集会, 愛媛大学, 2014 年 8 月 9 日.

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals attached to non-holomorphic Siegel

modular forms of degree 2, 跡公式と関連する話題について, 東京大学, 2013年9月7日.

石井 卓, 古典群の class one Whittaker 関数の明示公式, 保型形式の整数論月例セミナー, 東京大学, 2013年5月11日.

Taku Ishii, Archimedean L-factors for standard L-functions attached to non-holomorphic Siegel modular forms of degree 2, 保型表現とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2013年1月23日.

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for the exterior square L-functions on $GL(n)$, Kyoto conference on automorphic forms, 京都大学, 2012年10月5日.

Taku Ishii, Pieri-type formulas for $GL(n, \mathbb{R})$ -Whittaker functions and its application, 超幾何関数とその周辺, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2012年6月30日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 卓 (Ishii Taku)

成蹊大学・理工学部・准教授

研究者番号: 60406650