

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740026

研究課題名(和文)複素等質空間における可視的作用の分類理論

研究課題名(英文)Classification theory of visible actions on complex homogeneous spaces

研究代表者

笹木 集夢 (Sasaki, Atsumu)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：60514453

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：複素等質空間における可視的作用の分類理論の構築を目指している。本研究では複素単純リー群のアフィン複素等質空間に対してコンパクト群が可視的に作用するためには等質空間が球的であることが必要十分であることを証明した。その中で、ケーリー型球等質空間に対するカルタン分解の一般化を与え、これにより各軌道と交叉する部分多様体を具体的に構成した。さらに、非コンパクトなエルミート対称空間が非管状型であることの特徴付けを、可視的作用の視点、その上の(スカラー型)正則離散系列表現の制限による認容性の視点、無重複性の視点で与えた。

研究成果の概要(英文)：The aim of our study is to construct a classification theory of visible actions on complex homogeneous spaces. In this study, we prove that for an affine complex homogeneous space of a complex simple Lie group the compact group action on it is visible if and only if it is spherical. During this study, we provide a generalization of a Cartan decomposition for a special case of Cayley type spherical homogeneous space and an explicit description of a submanifold which meets every orbit. Moreover, we give a characterization of a non-compact Hermitian symmetric space to be of non-tube by visible actions on it, the admissibility and the multiplicity-freeness of the restriction of (a scalar type) holomorphic discrete series representation.

研究分野：数物系科学

キーワード：代数学 リー群の表現論 可視的作用 スライス カルタン分解 無重複表現 認容表現

### 1. 研究開始当初の背景

リー群同変な複素多様体上の正則ベクトル束において、正則な切断に実現される表現の無重複性を統一的に説明する、という理論が小林俊行によって提唱され、有限次元表現のみならず連続スペクトルを含む無限次元表現に対しても、広い範囲で無重複表現を統一的に説明することができる(無重複性の伝播定理)。この理論において重要な役割を果たすのが、複素多様体における可視的作用という概念である。そこには、各軌道と交叉する部分多様体(スライス)という幾何構造、および各軌道を保存する反正則微分同相写像が入る。

研究代表者は、可視的作用の分類理論の構築を目指している。最近、線型空間に対する分類を完成させ、線型空間上の多項式環に自然に定まる表現の無重複性との関係を明らかにした。後者の表現論的性質は、線型空間が群作用によって球的であるという条件によって特徴付けられる。一般に、複素多様体に群が可視的に作用するとその上の関数空間が表現として無重複であることが説明されるが、逆に複素多様体が球的、あるいはその上の関数空間が無重複表現であるときにコンパクト群が可視的に作用することが予想される。この視点にたつて、線型空間に続く形で複素等質空間に対する可視的作用の分類理論の研究に着手し、アフィン複素等質空間および冪零軌道について具体的に研究を開始した。

等質空間の特別な場合として対称空間がある。この場合は小林俊行に肯定的に解決され、対称空間に対するカルタン分解とよばれる分解定理を用いてスライスを構成することができるという一般論が確立している。一方で、対称でないクラスに対する標準形の理論はほとんど知られていないため、群作用によるスライスの構成が本質的な問題である。

アフィン複素等質空間に対する先行研究として、Akhiezer—Püttmann によって球的であるための十分条件が与えられ、各軌道を保存する反正則微分同相写像が存在することによって特徴付けた。一方で、可視的作用の視点から研究することは、各軌道と交叉する部分多様体という幾何構造が入ることになり、彼らの結果よりも強い結果を得ることができる。これまでに、非管状型エルミート対称空間上の直線束に対して研究成果を得ており、球 4 対称空間に対する研究も進展している。

複素冪零軌道における可視的作用の分類と球冪零軌道の関係も徐々に明らかになってきていた。特に、スライスや各軌道を保存する反正則微分同相写像を具体的に示したが、それらの詳細な研究は今後の課題であった。さらに、実冪零軌道に対する本視点からの研究も同様に遂行できると思われる。

### 2. 研究の目的

(1) 連結な複素半単純リー群のアフィン複素球等質空間に対し、コンパクト実型の作用によるスライスや各軌道を保存する反正則微分同相写像の構成法や幾何学的構造を明らかにし、対称空間を含むような理論の発見を目指した。

(2) 対称空間に対するカルタン分解の理論を非対称なアフィン複素球等質空間に拡張することを目指し、分類にある各球等質空間に対してカルタン分解の一般化を試みた。

(3) 複素単純リー環の複素冪零軌道における可視的作用において、スライスおよび各軌道を保存する反正則微分同相写像の存在および構成に関する一般論を研究した。

さらに、実単純リー環の実冪零軌道への応用を試みた。実冪零軌道は Kostant—関口対応によりある複素冪零軌道と 1 対 1 に対応する。後者の意味で、群作用の可視性について調べ始めた。

### 3. 研究の方法

(1) 複素単純リー群のアフィン球等質空間は対称空間と 1 2 種類の非対称空間に分類される(Krämer)。非対称な 1 2 種類のうち、非エルミート対称空間上の複素直線束(3 種類)に対する研究は詳細に遂行された。また、球 4 対称空間に対して、スライスの構成および反正則微分同相写像の構造についてより精緻に研究した。

(2) 非対称なアフィン球等質空間の中でケーリー型球等質空間とよばれる球等質空間が 3 種類存在する。これらは、階数 2 の例外型リー群や 7 次のスピノル群を用いた等質空間として表される一方、ケーリー代数(八元数)の部分多様体として実現される。この実現を用いると、群作用を標準座標によって具体的に表現することが可能となる。事実、1 種類に対してはこの方法により研究成果を得ている。残りの 2 種類についてもこの視点で研究を行った。

(3) 非対称な球等質空間に対する群の分解定理を研究した。等質空間表示に用いる群の「中間」に位置する適当な部分群を用意して複数の分解定理を「編み上げる」方法により構成する。この視点により、ケーリー型球等質空間の分解定理を研究した。

(4) 複素単純リー環の複素冪零軌道における可視的作用において、反正則微分同相写像の構成およびその性質に関する一般論を研究した。複素冪零軌道における可視的作用の分類理論が進展した。

(5) 2013 年 3 月にドイツにおいて、非コンパクトエルミート対称空間が非管状型になることの特徴付けを球多様体における可視的

作用によって与えたことを講演した。その際に, M. Duflo から正則離散系列表現の制限における分岐則との関連性を指摘された。これを受けて, 非コンパクトエルミート対称空間に対する作用の可視性を研究した。

#### 4. 研究成果

(1) 複素単純リー群の球 4 対称空間におけるコンパクト実型の作用において, 各軌道を保存する反正則微分同相写像として, その固定部分群のリー環が正規実型に同型となるものを選ぶことができることを証明した。正規実型は同型を除いて一意であるため, この写像も共役を除いて一意に存在する。

(2) ケーリー型球等質空間に対して, コンパクト実型が可視的に作用することを証明した。その証明法を, スライス構成法によって 2 通り与えた。

ケーリー型球等質空間をケーリー代数 (八元数) の部分多様体として実現し, 7 次のスピノル群や階数 2 の例外型群特有の性質を駆使することで, スライスを具体的に構成した。

適当な閉部分群を選んでケーリー型球等質空間を対称空間上のファイバー束と理解し, 底空間に対するカルタン分解, およびファイバーにおける群作用の軌道分解を編み上げる方法で構成した。

(3) (2) により, ケーリー型球等質空間に対するカルタン分解を具体的に与えた。

(4) 複素単純リー群のアフィン複素等質空間に対する可視的作用の分類を得た。特に, コンパクト実型が可視的に作用することとアフィン複素等質空間が球的であることが同値であることを明らかにした。さらに, 各軌道と交叉するスライスを具体的に構成した。

(5) 非コンパクトな既約エルミート対称空間が非管状型であるための特徴付けを新たに次の視点で与えた。

正則離散系列表現を極大コンパクト群の交換子群へ制限すると認容表現であること。

スカラー型正則離散系列表現を極大コンパクト群の交換子群へ制限すると無重複表現であること。

エルミート対称空間に対する交換子群の作用が可視性であること。このとき, スライスの次元は対称空間の実次元に一致するものを選ぶことができる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Atsumu Sasaki, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, Proceedings of the Japan Academy, Series A, 査読有, 91 (2015), 70-75, doi: 10.3792/pjaa.91.70.

笹木集夢, Visible actions on spherical nilpotent orbits, 京都大学数理解析研究所講究録 1929「群作用と部分多様体論の展開」, 査読無, (2015), 112-123.

Atsumu Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Oberwolfach Reports: Representations of Lie groups and Supergroups, 査読無, 10 (2013), 786-788, doi: 10.4171/OWR/2013/13.

笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces, 京都大学数理解析研究所講究録 1825「表現論と非可換調和解析の展望」, 査読無, (2013), 120-132.

[学会発表](計 11 件)

Atsumu Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits, Analysis, Geometry and Representations on Lie Groups and Homogeneous Spaces, 2014 年 12 月 11 日, Ryad Mogador Opera Hotel (マラケシュ(モロッコ)).

笹木集夢, Visible actions on spherical nilpotent orbits, 2014 年度表現論シンポジウム, 2014 年 11 月 26 日, 夢海游淡路島 (兵庫県洲本市)。

笹木集夢, A Cartan decomposition for Caley type homogeneous spaces, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会函数解析学分科会, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学 (広島県東広島市)。

Atsumu Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits, 京都大学数理解析研究所研究集会「群作用と部分多様体論の展開」, 2014 年 6 月 27 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)。

Atsumu Sasaki, A Cartan decomposition for holomorphic line bundles over Hermitian symmetric spaces and its application to visible actions, The Fourth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics, and Applied Mathematics, 2014 年 3 月 19 日, 東海大学 (神奈川県平塚市)。

Atsumu Sasaki, A characterization of

non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, 3rd Tunisian-Japanese Conference `Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Prof. Hidenori Fujiwara, 2013年12月21日, El Mouradi Palace Hotel (ハマメット (チュニジア)).

Atsumu Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, JSPS-NOW Seminar `Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, 2013年8月26日, 名古屋大学 (愛知県名古屋市).

笹木集夢, Compatible automorphisms for visible linear actions, 日本数学会 2013年度年会函数解析学学科会, 2013年3月21日, 京都大学 (京都府京都市).

Atsumu Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Oberwolfach Workshop `Representations of Lie Groups and Supergroups”, 2013年3月15日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (オーベルヴォルバッハ (ドイツ)).

Atsumu Sasaki, Some remarks on visible actions on multiplicity-free spaces, The Third KMITL-TKU Joint International Symposium on Mathematics and Applied Mathematics, 2012年7月29日, Ambassador City Jomtien Hotel (パタヤ (タイ)).

笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces, 京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」, 2012年6月21日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

笹木 集夢 (SASAKI ATSUMU)

東海大学・理学部・講師

研究者番号: 60514453