様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００２８

研究課題名（和文）リーマン面のモジュライ空間のコホモロジーの研究

研究課題名（英文）A study on the cohomology of the moduli spaces of Riemann surfaces

研究代表者
三鍋　聡司（Minabe, Satoshi）

東京電機大学・工学部・准教授

研究者番号：３０４５５６８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：点付きの安定リーマン面のモジュライ空間、特にそのコホモロジーの構造について研究した。このモジュライ空間のコホモロジーは、点の置換を考えることにより自然に対称群の線形表現となる。この構造に着目し、表現の指標を種数がゼロの場合、及び重み付きの点付きリーマン面のモジュライ空間の一種であるロゼフ・マニン空間について決定した。また、ロゼフ・マニン空間の種数１の場合の類似と考えられるモジュライ空間についても研究を行い、コホモロジーの指標公式を求めた。以上の内容と並行して、混合フロベニウス構造と量子コホモロジーに関する研究も行った。

研究成果の概要（英文）：We studied moduli spaces of Riemann surfaces with marked points, with a particular emphasis on their cohomology rings. The symmetric groups act on these spaces via permutation of marked points. We determined the character of the cohomology as a representation of the symmetric groups in the genus zero case. We also studied some related moduli spaces of weighted stable curves, called Losev-Manin space and its genus one analogue. In addition to these, we made a study on the mixed Frobenius structure and local quantum cohomology.

研究分野：代数幾何学

キーワード：モジュライ空間　コホモロジー　混合フロベニウス構造

１．研究開始当初の背景

種数ｇのリーマン面のモジュライ空間とは、種数ｇの閉リーマン面の双正則同値類全体のなす複素代数多様体のことである。これにリーマン面上の相異なるｎ点というデータを加え、ｎ点付きリーマン面のモジュライ空間を考える。以下ではこのモジュライ空間の有理係数コホモロジーを考える。以下、単にモジュライ空間と言えば、点付きリーマン面のモジュライ空間（より正確にはそのドリーニュとマンフォードによるコンパクト化）を指すものとする。

モジュライ空間のコホモロジーの研究はマンフォードに始まり、その後ファーバーやロイエンハーらによって精力的に行われた。特に、標準類と呼ばれるコホモロジー類に関しては多くの結果が得られている。ここで標準類とは、モジュライ空間上に標準的に存在するコホモロジー類のことである。例えば、モジュライ空間上の自然なベクトル束の特性類や、自然な代数的サイクル(例えば超楕円曲線たちのなすサイクル)は標準類となる。標準類たちの交点数はグロモフ・ウィッテン不変量の理論において重要であるが、コンツェヴィッチによって解決されたウィッテン予想により KdV 方程式の理論とも繋がっている。このような背景があり、標準類に関しては多くの研究がなされていた。

一方で、モジュライ空間のコホモロジーには標準類ではないコホモロジー類も一般には存在する。これらを非標準類と呼ぶ。例えば、奇数次のコホモロジー類が存在すればそれは非標準類である。非標準類を見付けることは容易ではなく、あまり多くのことは知られていない。しかし、非標準類の構造を理解しようとする機運も高まっていた。その動機の１つに、モジュライ空間の数論的性質を反映する非標準類の存在がある。例を挙げよう。非標準類が現れる最初の例は、11 点付き楕円曲線のモジュライ空間の 11 次のコホモロジーにおいてである。このモジュライ空間は正則 11 形式を持ち、それはラマヌジャンのΔ関数と呼ばれる 1 変数の保型形式を使って書ける。さらに、正則 11 形式の定める非標準類とその複素共役のなす 11 次コホモロジーの 2 次元部分空間(部分ホッジ構造)は、Δ関数に付随するガロア表現に対応している（アイヒラー、志村、ドリーニュによる結果）。この結果の種数が 2 以上の場合への拡張が、ベルグストローム、ファーバー、ファン・デル・ヘアーによって研究され、非標準類と多変数の保型形式との関係が明らかにされつつあった。

２．研究の目的

上で述べたように、点付きリーマン面のモジュライ空間のコホモロジーを考えると、そのコホモロジー類は標準類と非標準類という 2 種類に分類される。前者はモジュライ空間上に標準的に存在するコホモロジー類であり、これに関しては多くの研究がある。一方、後者の構造については未だ謎の部分が多い。これを踏まえ、本研究では非標準類の性質を系統的に研究することを目的とした。具体的には、次の 4 点を主要な課題として研究を行った。

① コホモロジー類が非標準類であるための判定法を確立する。

② 非標準類が存在するのはいつか、存在する場合には何次元あるかを決定する。

③ 非標準類の存在とモジュライ空間の大域的性質との関係を調べる。

④ 非標準類の持つホッジ構造と保型形式およびガロア表現との対応関係を調べる。

３．研究の方法

本研究では、対称群の表現論を主要な道具として非標準類の特徴付けを行い、非標準類が存在するのはいつか、存在する場合には何次元あるかを決定することを目標とした。さらに、非標準類の存在とモジュライ空間の大域的性質との関係、保型形式およびそれに付随するガロア表現との対応関係についても明らかにすることを目指した。研究方法の詳細は次の通りである。

上記の課題①と②については、対称群の表現論を用いて研究した。少し詳しく説明する。まず、ｎ点付きリーマン面のモジュライ空間には、ｎ点の置換としてｎ次対称群が双正則に作用し、これによってコホモロジーは対称群の線形表現となる。標準類の全体と非標準類の全体は、この表現に関してそれぞれ部分表現をなす。この 2 つの部分表現の構造の差異を見ることによって非標準類を捉えよう、というのが基本的なアイディアである。ここでの目標は、モジュライ空間のコホモロジー類が非標準類であるための判定法を、対称群の表現の言葉で与えることであった。この判定法により、コホモロジー類の持つ対称性を調べることで、標準類と非標準類を見分けられるようになると期待された。判定法について詳しく述べるために、まず、表現の長さという概念を導入する。よく知られた事実として、ｎ次対称群の既約表現は、ｎの自然数による分割（あるいは箱の数がｎ個のヤング図形）と 1 対 1 に対応する。既約表現に対応する分割の長さ（ヤング図形の行の数）を、その既約表現の長さと呼ぶ。例えば、自明表現の長さは 1 であり、符号表現の長さはｎである。この意味で、表現の長さは、その表現が対称と反対称のどちらに近いかを測る 1 つの指標といえる。ファーバーとパンドハリパンデは、標準類のなす既約表現の長さの上からの評価を与えた。つまり、標準類のなす表現の長さには非自明な上界が存在する。従って、

それを超える長さの表現に属するコホモロジー類があれば、それは非標準類であると結論できる。本研究ではこの判定法の精密化を一つの目標とした。

次に課題③について述べる。種数 g を固定して点の数 n を大きくしていくとき、最初に非標準類が現れる n の値に注目し、この値を n の臨界値と呼ぶことにする。例えば g が 1 の場合には n の臨界値は 11 であり、この臨界値を境としてモジュライ空間の性質が変化する。点の数 n が 11 より小さいときにはモジュライ空間は有理的な代数多様体であるが、n が 11 以上になると非有理的になる。種数が 2 以上の場合に同じ現象が起こるかどうかは興味深い問題である。そこで、種数 g が 4 程度までの場合に、n の臨界値付近でのモジュライ空間の性質(有理性、単有理性、非有理性など)を調べ、非標準類の存在とモジュライ空間の大域的性質との相関関係を検証し、非標準類を持つモジュライ空間の大域的性質の一端を明らかにしたいと考えた。

最後に課題④について述べる。保型形式とそれに付随するガロア表現は、数論における重要な研究テーマである。前に述べた通り、ベルグストロームらによって、モジュライ空間のコホモロジーが、保型形式、あるいはそれに対応するガロア表現の情報を持っていることが明らかにされつつあった。これは、モジュライ空間が数論的な重要性を持った空間であることを意味する。そこで、本研究で得られた成果を将来的には数論的な問題にも応用することを念頭におき、対称群の作用を用いて保型形式に対応する非標準類の特徴付けを与えたいと考えた。対称群の作用はモジュライ空間の自己同型としての作用なので、コホモロジーをその表現として既約分解すると、それは同時にホッジ構造の分解にもなる。保型形式に対応する非標準類は特殊なホッジ構造を持ち、それはコホモロジー類が持つ対称性に反映されるはずである。この点を詳しく調べ、どのような対称性を持つ非標準類が保型形式に対応するのかを明らかにすることを目指した。また、保型形式に対応する非標準類のホッジ構造についても詳しく研究し、それがどのようなガロア表現に対応するのか、またガロア表現に関するどのような情報を持っているのかを明らかにしようと考えた。

４．研究成果

ベルグストローム（ストックホルム大学）との共同研究で、モジュライ空間のコホモロジーの、対称群の表現としての既約分解と指標を求める問題を研究した。まず、種数が 0 の場合に、コホモロジーの対称群の表現としての既約分解を求める帰納的計算法が得られた。この結果の応用として、種数が 0 の場合には、ファーバーとパンドハリパンデによる評価式は最良のものであることが証明された。また、ロゼフ・マニン空間と呼ばれる、重み付きの点付き安定曲線のモジュライ空間についても、類似の問題を研究し、コホモロジーの表現論的構造を決定した。以上の研究結果は、下記の論文②及び③として発表されている。

上記の研究の続きとして、ある重みに関する種数１の安定曲線のモジュライ空間のコホモロジーについて研究した。これはロゼフ・マニン空間の種数１の場合に当たる空間と考えられ、ベルグストロームとのロゼフ・マニン空間のコホモロジーに関する研究の延長線に位置するものである。成果として、コホモロジーの対称群の表現としての指標を計算する公式を発見し、それを用いて計算を実行した。結果として、点の数が 11 以上になるとモジュラー形式（ラマヌジャンのΔ関数）に対応するコホモロジー類(非標準類)が現れ、それらは表現論的な長さの意味で特異な振る舞いをすることが観察できた。結果として、この場合にはモジュライ空間が非有理的であることが従う。（論文は現在準備中。）これを種数が２以上の場合にも拡張すべく、現在も共同研究を継続している。

上記のモジュライ空間に関する研究と並行して、混合フロベニウス構造についても研究を行った。これは、ミラー対称性の研究において重要な役割を果たすフロベニウス多様体の概念を基にして、研究代表者と小西由紀子（京都大学）によって２０１２年に導入された新しい概念である。フロベニウス多様体とは、平坦な計量を持つ複素多様体であって、各点の接空間が可換な結合代数の構造を持ち、さらにその代数構造と平坦計量が様々な整合性の公理を満たすものである。混合フロベニウス多様体である。これは、各点の接空間が代数構造を持つという点ではフロベニウス多様体と同じだが、平坦計量が接空間全体にあるとは限らず、各接空間において指定されたイデアルの飽和フィルターの逐次商の上にのみ存在するというもので、フロベニウス多様体の一般化になっている(フィルターが自明な場合がフロベニウス多様体である)。下記の論文①では、射影多様体上の凹なベクトル束に付随する局所量子コホモロジーが、混合フロベニウス構造を持つことを示した。この成果は、局所ミラー対称性の数学的理解において、基本的な役割を果たすと考えている。また、将来的には、混合フロベニウス構造の理論を、リーマン面のモジュライ空間、特にそのコホモロジーの研究にも応用したいと考えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Yukiko Konishi and Satoshi Minabe, Mixed Frobenius structure and local quantum cohomology, Publications of RIMS 52 (2016) 43-52, 査読あり.

② Jonas Bergström and Satoshi Minabe, On the cohomology of the Losev-Manin moduli space, Manuscripta Mathematica 144 (2014), 241-251, 査読あり.

③ Jonas Bergström and Satoshi Minabe, On the cohomology of moduli spaces of (weighted) stable rational curves, Mathematische Zeitschrift 275 (2013), 1095-1108, 査読あり.

〔学会発表〕（計　12　件）

①三鍋聡司, 混合フロベニウス構造とホッジ理論, 研究集会「ホッジ理論と代数幾何学」(於東京電機大学、東京都足立区), 2015 年 8 月 7 日.

②小西由紀子・三鍋聡司、混合フロベニウス構造と局所量子コホモロジー, 日本数学会代数学分科会（於明治大学、東京都千代田区）, 2015 年 3 月 21 日.

③三鍋聡司, 混合フロベニウス構造と局所量子コホモロジー, 香川セミナー（於香川大学、香川県高松市）, 2015 年 2 月 21 日.

④三鍋聡司, 混合フロベニウス構造と局所量子コホモロジー, 第 61 回幾何学シンポジウム（於名城大学、愛知県名古屋市）, 2014 年 8 月 25 日, 同予稿集 147-153.

⑤三鍋聡司, 混合フロベニウス構造と局所グロモフ・ウィッテン不変量, 第 60 回幾何学シンポジウム（於東京工業大学、東京都目黒区）, 2013 年 8 月 24 日, 同予稿集 13-17.

⑥ Satoshi Minabe, On the mixed Frobenius structure, ミラー対称性研究集会（於千葉大学、千葉県千葉市）, 2013 年 2 月 14 日.

⑦三鍋聡司, Introduction to mixed Frobenius manifolds,研究集会「場の理論とトポロジー」(於信州大学、長野県松本市), 2013 年 2 月 6 日.

⑧三鍋聡司, Mixed Frobenius structure and Local A-model,代数幾何学セミナー（於京都大学、京都府京都市）, 2012 年 11 月 5 日.

⑨小西由紀子・三鍋聡司, 混合フロベニウス構造と局所 A 模型,日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会　（於九州大学、福岡県福岡市）, 2012 年 9 月 20 日

⑩Satoshi Minabe, A generalization of Frobenius algebra and local A-model,研究集会「Mirror Symmetry and Related topics」(於昆明理工大学、中華人民共和国昆明市) 2012 年 8 月 21 日.

⑪三鍋聡司, On the mixed Frobenius structure,研究集会「ホッジ理論と代数幾何」(於東京電機大学、東京都足立区), 2012 年 8 月 2 日.

⑫三鍋聡司, Local A-model and mixed Hodge structure,研究集会「ホモロジー的ミラー対称性の SYZ 的アプローチ」（於千葉大学、千葉県千葉市） 2012 年 3 月 21 日.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

ホームページ等　なし

6．研究組織

(1)研究代表者

三鍋　聡司（MINABE, Satoshi）
東京電機大学・工学部・准教授
研究者番号：30455688

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

小西　由紀子（KONISHI, Yukiko）
京都大学大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：30505649

Jonas Bergström **(BERGSTÖM, Jonas)**
ストックホルム大学