様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００３１

研究課題名（和文）符号，格子及び頂点作用素代数の対称性

研究課題名（英文）Symmetry of Codes, Lattices, and Vertex operator algebras

研究代表者
三枝崎　剛（MIEZAKI, Tsuyoshi）

山形大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：６０５８４０６８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：　符号・格子・頂点作用素代数という，互いに密接な関係を持つ数学的対象がある．3者は類似した性質を数多く持ち，例えば最小距離やt-デザインという概念が，それぞれに定義されている．本研究の目的は，これら3者の分類に向けて，それぞれの数学的性質を明らかにする事である．例えば，それぞれに定義されている，最小距離の上界の決定や，t-デザインのtの値の決定は，3者の分類へ役立つ事が知られており，本研究の目的である．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is the classification of the codes, the lattices, and the vertex operator algebras from the point of view of the modular forms and the design theory.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：符号　格子　頂点作用素代数　デザイン理論　保型形式

1．研究開始当初の背景

符号・格子・頂点作用素代数（以後 VOA と呼ぶ）という，互いに密接な関係を持つ数学的対象がある．符号から格子及び VOA が構成出来，格子から VOA が構成出来るように，3 者は類似した性質を数多く持ち，例えば最小距離や t-デザインという概念が，それぞれに定義されている．特に符号はもともと情報伝達の手段，効率化を目的に導入された概念であり，実生活にも幅広い応用を持つ．従って 3 者の分類問題は，実生活への応用上も，数学的にも面白い重要な問題である．

本研究の目的は，これら 3 者の分類に向けて，それぞれの数学的性質（最小距離や t-デザイン）を明らかにする事である．例えば，それぞれに定義されている，最小距離の上界の決定や，t-デザインの t の値の決定は，3 者の分類へ役立つ事が知られており，本研究の目的である．

2．研究の目的

(1) 符号について

Z_{2k} を法 2k で考えた整数環とする．有限環 Z_{2k}^n の部分 Z_{2k}^n-加群を長さ n の Z_{2k}-符号と呼ぶ. ある場所 A から離れた場所 B へと情報を伝達する際，その確実性・効率性等の研究として，符号理論は始まった [Shannon (1948)]．符号の元の間には，ある距離が定義されており，符号の元の個数に比べて最小距離(最小となる距離)が大きい符号は，情報通信の際，高い誤り訂正能力を持ち，実は数学的にも面白い対象である．つまり，符号の元の個数を固定した時，最小距離は出来る限り大きくしたい．また，Z_{2k}-符号において，対称性の高い自己双対という性質を持ち，かつ符号の全ての元と 0 との距離が，4k の倍数となる符号は，Type II 符号と呼ばれ，特に興味深く，分類が重要問題である．

1 つの分類の手段として，Z_{2k}-符号に対して，最小距離 d_k の上界が調べられてきた．例えば Type II Z_2-符号については [Mallows-Sloane (1973)]によって，Type II Z_4-符号は[Bonnecaze, et al.(1997)]によって，d_kの上界が決定されている．この上界を達成する時，符号は極限的と呼ばれる．極限的な符号は高い誤り訂正能力をもち，更に，数学的に興味深い組合せデザインと呼ばれる，対称性の高い構造を持つ．即ち，最小距離の上界を決定する事は，数学的にも，性能の良い極限的な符号の発見においても重要である．しかし一方で，極限的な Type II Z_2-符号は，長さ n が十分大きい時，存在しない事が分かっている [Mallows-Sloane (1973)].

(2) 格子について

球面 t-デザイン[Delsarte, et al.(1977)]という概念がある．X を，d 次元球面上の有限集合とする. t 次以下の任意の多項式 f(x)に対して，f(x)の球面上の平均と，有限集合上の平均が一致する時, X は球面 t-デザイン(以後 t-デザインと呼ぶ)と呼ばれる．X が t-デザインだが, (t+1)-デザインでない時, t を X のデザインの強さと呼ぶ.

球面デザインの構成法に格子を用いるものがある．ユークリッド空間 R^n の格子 L とは， R^n の基底 $e_1,\ldots,e_n$ に対して, $L:= Z e_1+\ldots+Z e_n$ と定義される．ここで，格子の原点からの距離が等しい格子点の集合(シェルと呼ぶ)は，球面上の点集合と考えられ，格子から球面デザインを構成する方法とは，そのシェルから t-デザインを構成しようというものである．シェルのデザインの強さを決定すると，格子の分類に役に立ち [Nottebaum (1995)]，また以下に述べる様に整数論への応用もある．従って，シェルのデザインの強さの決定は重要な問題である．

(3) 頂点作用素代数について

散在型の有限単純群の中で，最も位数の大きい群は，モンスター群と呼ばれる．モンスター群に関するムーンシャイン予想の解明の為に，[Borcherds (1986)]によって導入された頂点作用素代数(以後 VOA と略す)という概念がある. 近年[H¥"ohn (2008)] により，球面デザインの類似として，VOA に対し共形 t-デザインという概念が定義された（以後 t-デザインと呼ぶ)．VOA の対称性が高いほど，tの値が大きくなるように定義されている．

また近年, マシュームーンシャイン現象(以後 M 現象と略す)が発見され，多くの数学者と物理学者の関心を集めている．この現象は，ある物理現象から導き出される保型形式に関係した関数「擬テータ関数」に，一見無関係なマシュー群の持つ量(指標値)が現れる，というミステリアスなものである．先に述べたように，ムーンシャイン現象から VOA が生み出されたように, 今回見つかった M 現象の解明は，予想もしていなかった新たな数学を生み出す可能性のある，非常に重要な問題である．

3．研究の方法

符号・格子および頂点作用素代数には，不変式，保型形式と密接に結び付く．特にデザイン理論と最小距離の理論と関係する．報告者は，不変式・保型形式の対称性を調べる事で，デザインと最小距離への応用を目指した．

4．研究成果

(1)ある極限的符号の組合せ構造を決定した（論文①，④）．

(2) マシュームーンシャイン現象と関連する関数の関係を調べた（論文②，③，⑪）．

(3)極限的符号の存在性を議論した（論文⑤）．

(4)球面デザイン，共形デザインとレーマー予想の関係を調べた（論文⑥，⑧）．

(5)球面デザインの概念を一般化した（論文⑦，⑩）．

(6)ある極限的符号の組合せ構造を決定した（論文①，③）．

(7)odd Leech の frame について調べた（論文⑨）．

5．主な発表論文等

① Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora, An upper bound of the value of t of the support t-designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 79-1, 2016, 37-46
DOI: 10.1007/s10623-014-0033-7

② Tsuyoshi Miezaki, Matthias Waldherr, Congruences for the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function, J. Number Theory, 査読有, 7148, 2015, 451-462
DOI: 10.1016/j.jnt.2014.09.025

③ Thomas Creutzig, Gerald Höhn, Tsuyoshi Miezaki, The McKay-Thompson series of Mathieu Moonshine modulo two, Ramanujan J., 査読有, 34-3, 2014, 319-328.
DOI: 10.1007/s11139-013-9553-4

④ Naoyuki Horiguchi, Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora, On the support designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 72-3, 2014, 529-537.
DOI: 10.1007/s10623-012-9782-3

⑤ Masaaki Harada, Tsuyoshi Miezaki, On the Existence of Extremal Type II $\mathbf{Z}_{2k}$-Codes,, Math. Comp. , 査読有, 83-287, 2014, 1427–1446.
DOI:10.1090/S0025-5718-2013-02750-0

⑥ Eiichi Bannai, Tsuyoshi Miezaki, Toy models for D.H. Lehmer's conjecture II, Quadratic and Higher Degree Forms (Developments in Mathematics), 査読有, 31, 2013, 1-27.
DOI:10.1007/978-1-4614-7488-3_1

⑦ Tsuyoshi Miezaki, On a generalization of spherical designs, Discrete Mathematics, 査読有, 313-4, 2013, 375-380.
DOI: 10.1016/j.disc.2012.11.012

⑧ Tsuyoshi Miezaki, Conformal designs and D.H. Lehmer's conjecture, Journal of Algebra, 査読有, 375, 2013, 59-65.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.10.019

⑨ Tsuyoshi Miezaki, Frames in the odd Leech lattice, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 132-12, 2012, 2773-2778.
DOI: 10.1016/j.jnt.2012.05.030

⑩ Tsuyoshi Miezaki, Makoto Tagami, On Euclidean designs and potential energy, Electronic Journal of Combinatorics, 査読有, 19-1, 2012, 18pp.
http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v19i1p2
DOI:10.1007/978-1-4614-7488-3_1

⑪ Tsuyoshi Miezakia, On the Mathieu mock theta function,, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 査読有, 88-2, 2012, 28-30.
DOI: doi:10.3792/pjaa.88.28

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora, An upper bound of the value of t of the support t-designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 79-1, 2016, 37-46 DOI: 10.1007/s10623-014-0033-7

② Tsuyoshi Miezaki, Matthias Waldherr, Congruences for the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function, J. Number Theory, 査読有, 7148, 2015, 451-462
DOI: 10.1016/j.jnt.2014.09.025

③ Thomas Creutzig, Gerald Höhn, Tsuyoshi Miezaki, The McKay-Thompson series of Mathieu Moonshine modulo two, Ramanujan J., 査読有, 34-3, 2014, 319-328.
DOI: 10.1007/s11139-013-9553-4

④ Naoyuki Horiguchi, Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora, On the support designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 72-3, 2014, 529-537.
DOI: 10.1007/s10623-012-9782-3

⑤ Masaaki Harada, Tsuyoshi Miezaki, On the Existence of Extremal Type II $\mathbf{Z}_{2k}$-Codes,, Math. Comp. , 査読有, 83-287, 2014, 1427–1446.
DOI:10.1090/S0025-5718-2013-02750-0

⑥ Eiichi Bannai, Tsuyoshi Miezaki, Toy models for D.H. Lehmer's conjecture II, Quadratic and Higher Degree Forms (Developments in Mathematics), 査読有, 31, 2013, 1-27.
DOI:10.1007/978-1-4614-7488-3_1

⑦ Tsuyoshi Miezaki, On a generalization of spherical designs, Discrete Mathematics, 査読有, 313-4, 2013, 375-380.
DOI: 10.1016/j.disc.2012.11.012

⑧ Tsuyoshi Miezaki, Conformal designs and D.H. Lehmer's conjecture, Journal of Algebra, 査読有, 375, 2013, 59-65.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.10.019

⑨ Tsuyoshi Miezaki, Frames in the odd

Leech lattice, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 132-12, 2012, 2773-2778.
DOI: 10.1016/j.jnt.2012.05.030

⑩ Tsuyoshi Miezaki, Makoto Tagami, On Euclidean designs and potential energy, Electronic Journal of Combinatorics, 査読有, 19-1, 2012, 18pp.
http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v19i1p2
DOI:10.1007/978-1-4614-7488-3_1

⑪ Tsuyoshi Miezakia, On the Mathieu mock theta function,, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 査読有, 88-2, 2012, 28-30.
DOI: doi:10.3792/pjaa.88.28

〔学会発表〕(計 11 件)

① Tsuyoshi Miezakia, 2 次形式の表現数と符号理論, Intersection of Pure Mathematics and Applied Mathematics VIII: Special, 2015 年 2 月 20 日, 九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市).
② Tsuyoshi Miezakia, Eisenstein series and E-polynomials, RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 2014 年 12 月 17 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
③ Tsuyoshi Miezakia, Eisenstein polynomials and Zeta polynomials, Workshop on Galois point and related topics, 2014 年 9 月 13 日, 滋賀大学大津サテライトプラザ(滋賀県・大津市).
④ Tsuyoshi Miezakia,デザイン理論から見た,符号, 格子及び頂点作用素代数の一つの類似, デザイン、符号、グラフおよびその周辺, 2014 年 7 月 24 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
⑤ Tsuyoshi Miezakia, E-polynomials and Zeta polynomials, Workshop around algebraic combinatorics at Kochi University, 2014 年 1 月 25 日, 高知大学(高知県・高知市).
⑥ Tsuyoshi Miezakia, The McKay-Thompson series of Mathieu Moonshine modulo two, 第３０回代数的組合せ論シンポジウム, 2013 年 6 月 24 日, 静岡大学(静岡県・静岡市).
⑦ Tsuyoshi Miezakia, 32 次元 extremal 2-modular 格子に関する注意, 第 25 回有限群論草津セミナー, 2013 年 8 月 3 日, 草津セミナーハウス(群馬県・草津市).
⑧ Tsuyoshi Miezakia, The McKay-Thompson series of Mathieu moonshine modulo two, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学(京都府・京都市).
⑨ Tsuyoshi Miezakia,マシュー群に関連した擬テータ関数に現れる合同式, 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 2013 年 1 月 7 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
⑩ Tsuyoshi Miezakia, On the existence of extremal Type II $\mathbf{Z}_{2k}$-codes, 南九州代数系集会, 2012 年 8 月 31 日, 熊本大学(熊本県・熊本市).
⑪ Tsuyoshi Miezakia, On the existence of extremal Type II $\mathbf{Z}_{2k}$-codes, 第 29 回代数的組合せ論研究集会, 2012 年 6 月 18 日, 弘前大学(青森県・弘前市).

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ等

https://sites.google.com/site/tmiezakij

６．研究組織

(1)研究代表者

三枝崎　剛（MIEZAKI, Tsuyoshi）
山形大学・地域教育文化学部・准教授
研究者番号：６０５８４０６８

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし