

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 22 日現在

機関番号：10102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740032

研究課題名(和文) 次数付き環拡大に付随する関数と重複度の研究

研究課題名(英文) A study of multiplicities associated to a graded ring extension

研究代表者

早坂 太 (HAYASAKA, Futoshi)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：20409460

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：可換環論を基礎に、局所環上の行列に付随する一般化された2変数ブックスバウム・リム関数及び随伴ブックスバウム・リム重複度の一般論を整備し、簡明化・精密化した。1次元コーエン・マコーレー局所環上の特別な形の巴系行列に付随する一般化された2変数ブックスバウム・リム関数及び随伴ブックスバウム・リム重複度の計算を行い、一般化された2変数ブックスバウム・リム関数が、多項式関数に一致する場合を完全に決定した。また、随伴ブックスバウム・リム重複度をイデアルの重複度で表す公式を得た。

研究成果の概要(英文)：We developed the general theory of a generalized Buchsbaum-Rim function of two variables and associated Buchsbaum-Rim multiplicities of a matrix over a local ring. We computed the generalized Buchsbaum-Rim function of two variables and its multiplicities in a special case, where the matrix is a parameter matrix of a special form over one-dimensional Cohen-Macaulay local ring. In the special case, we determined when the function coincides with the Buchsbaum-Rim polynomial of two variables. We also obtained the formula for associated Buchsbaum-Rim multiplicities in the special case.

研究分野：可換環論

キーワード：局所環 加群 ブックスバウム・リム重複度 ブックスバウム・リム関数 多重次数付き環

1. 研究開始当初の背景

(1) 加群の重複度とは、1964年に Buchsbaum-Rim によって導入されたイデアルの重複度の自然な拡張概念である。これをブックスバウム・リム重複度(以下、BR 重複度と略す)と呼ぶ。1985年、Kirby は Buchsbaum-Rim の定理の見直しを行った。これを皮切りに、様々な分野の研究者による BR 重複度の本格的な研究が開始された。Gaffney は、特異点論の研究において BR 重複度の概念の重要性を指摘し、イデアルの場合に類似の性質を予想した。Rees は Gaffney の問いに対し肯定的な解答を与え、Kirby との共同研究で、次数付き環拡大に付随する重複度の一般論を展開した。1994年、Kleiman-Thorup は、Kirby-Rees の理論を、代数幾何学を基礎に展開し、幾何学的にも自然な理論であることを示した。2001年、Simis-Ulrich-Vasconcelos は、これらの理論を、可換環論を基礎に展開し、その一部を簡潔化し発展させた。

(2) 2000年以降、BR 重複度研究は、可換環論のみならず様々な分野・角度から活発に行われている。可換環論の立場からの研究は、Ulrich を中心に、特異点論への応用も視野に入れながら、イデアルの重複度に関する事実の類似を作業仮説に据え、新しい研究手法の開発を中心課題として活発に行われている。しかしながら、イデアルの重複度研究が Samuel・永田によって確立されたイデアル論的手法を基礎に多くの詳しい解析がなされているのに対し、BR 重複度研究は、イデアルの場合のそれと比べ技術的に困難な部分が多く存在し、思うように進んでいないのが実状である。

2. 研究の目的

上述1の状況を踏まえ、本研究課題は、可換環論の立場から(イデアルのヒルベルト・サミュエル関数の一般化である)次数付き環拡大に付随する一般化されたブックスバウム・リム関数(以下、KT 関数と略し BR 関数と区別する)の基礎理論整備・構築を行い、局所環上の加群の重複度研究に有効な新しい手法を開発し、加群の BR 重複度理論を発展させることを目的とする。

(1) これまでに Eero Hyry 氏(タンペレ大学)との共同研究で、可換環論の立場からの BR 重複度及び BR 関数に関するいくつかの成果を得ている。イデアルの重複度研究で重要な役割を果たしている随伴次数環の概念を、加群の場合に拡張することを試み、加群に付随する次数加群の族を導入し、その性質を調べることで基礎環が2次元の場合に一定の成果を得た。Kirby によって導入された一般化された Koszul 複体のホモロジー群の部分オイラー標数が常に非負整数であることを証明し、巴系加群(巴系イデアルの加群版)の BR

重複度と colength に関する不等式(巴系イデアルの場合の類似の不等式)を証明した。2011年には、イデアルの場合にも新しい内容を含む巴系加群の BR 関数に関する精密な結果と Cohen-Macaulay 局所環(以下、CM 局所環と略す)の新しい特徴付けを得た。これにより巴系加群の第一 BR 係数は非正であるという結果(巴系イデアルの場合の類似の結果)を自然な形で得た。本研究は、(上述した)これまでに得られている知見と研究手法を基礎に、Kleiman-Thorup によって導入・研究された次数付き環拡大に付随する一般化された BR 関数(KT 関数)とそこに現れる係数(随伴 BR 重複度)について、可換環論の立場から研究を行い、BR 重複度研究に有効な技術・手法を開発し、加群の BR 重複度研究の発展・諸問題解決を目指す。

(2) Kleiman-Thorup の関数(KT 関数)は、次数付き環拡大に付随する2変数関数で、漸近的に多項式関数(以下、KT 多項式と呼ぶ)となり、その係数の一部に BR 重複度が現れる。また1変数のある値に固定することで通常の BR 関数が現れる。本研究では、巴系加群に付随する KT 関数の精密な解析を行い、BR 重複度研究を発展させる。具体的には、これまでに得られている BR 関数に関する結果から予想される次の課題に取り組み、その解決を目指す。

CM局所環上の巴系加群のKT関数は多項式関数に一致するか？

一般の局所環上の巴系加群のKT関数によるCM局所環の特徴付けは可能か？

巴系加群のKT多項式の係数(随伴BR重複度)の研究と具体的計算

(3) 本研究開始当初までの予備的研究で、基礎環が1次元正則局所環の場合に上記課題が正しい具体例のクラスを得ていた。また基礎環が2次元の場合には、KT関数の一部について精密な記述を得ていた。このような状況から、これまでの研究手法を駆使し、研究期間内に上記課題の完全解決を目指す。

3. 研究の方法

加群の BR 関数・BR 重複度研究を、BR 関数の一般化である次数付き環拡大に付随する KT 関数を用いて行う。本研究では、BR 重複度研究において重要な役割を果たしている巴系加群(巴系イデアルの加群版)に重点を置き、これまでの研究結果・手法を発展させ、局所環上の巴系加群の KT 関数について詳しい解析を行う。

(1) Simis-Ulrich-Vasconcelos たちによる先行する KT 関数の研究は、KT 関数の一部を抜き出して調べているもので、本研究推進には不十分である。そこで、KT 関数の基礎理論整備を行い、課題解決への準備とする。具体的

には Kleiman-Thorup によって導入された次数環を利用して Simis-Ulrich-Vasconcelos たちの方法を見直し、KT 関数の基礎理論構築を行う。

(2) 上記課題 解決及び課題 推進のため、多くの具体例の計算を行う。本研究開始当初までに得られていた 1 次元正則局所環上の典型的な巴系加群に付随する KT 関数の計算結果の詳細な解析を行い、1 次元 CM 局所環上の具体的な巴系加群の KT 関数計算を実行する。計算機を使った代数計算も積極的に活用する。

(3) Kirby-Rees は、多重次数付き加群のヒルベルト関数の一般論を基礎に、Kleiman-Thorup とは独立に KT 多項式の係数に関する研究を行い、代数的な議論による一般論を展開した。本研究では、Kirby-Rees の理論・研究手法に着目し、その詳細な調査・点検・解析を行うことで、課題解決への準備とする。

4. 研究成果

(1) 可換環論を基礎に KT 関数の一般論の整備を行った。特に、KT 関数の一部分を抜き出した関数である BR 関数の理論を KT 関数の視点から整備した。Simis-Ulrich-Vasconcelos たちによって展開されていた可換環論を基礎にしながら、Kleiman-Thorup の理論の中で導入・利用されていた多重次数付き環拡大から定義される多重次数付き環を明確にし、それを利用することで、KT 関数及び KT 重複度の一般論を簡明化・精密化した。その詳細は、明治大学大学院集中講義において、内容を整理、纏めて、発表した(学会発表)。

(2) CM 局所環上の巴系加群の BR 関数は最初から多項式となり、その最高次係数(BR 重複度)について簡明な公式が知られている。この類似として、CM 局所環上の巴系加群の KT 関数について調べた。最も単純な巴系加群である 1 次元 CM 局所環上の巴系イデアルの直和として表される加群の KT 関数の具体的計算を行った。直和する巴系イデアルの間に包含関係がある場合、KT 関数は最初から多項式関数に一致することを証明し、その多項式の形も決定した。また、包含関係がない 2 つの巴系イデアルの場合について詳細な解析を行い、巴系加群の KT 関数は最初から多項式になるとは限らないことを明らかにした。これにより、上記課題 の問題(予想)が一般には不成立であることがわかった。この結果は国内の研究集会において発表した(学会発表)。

(3) 1 次元 CM 局所環上のパラメータを対角成分にもつ対角行列は、典型的な巴系行列である。これは、長さ有限な巡回加群の直和に付随する行列の特別な場合と見なせる。この視

点から、上述(2)の計算を見直し、精密化した。KT 関数が始めから多項式関数にならない場合があることは(上述(2)の通り)明らかになっていたが、より詳細な解析を行うことで、KT 関数が始めから多項式となる場合を完全に決定した。この結果は国内の研究集会で発表した(学会発表)。また、これらの結果は内容を整理し論文として纏め専門誌に投稿した(雑誌論文)。

(4) 上記(3)で述べた通り、1 次元 CM 局所環上の典型的な巴系行列は長さ有限な巡回加群の直和に付随する行列の特別な場合と見なせる。そこで、一般次元のネーター局所環上長さ有限な巡回加群の直和に付随する KT 重複度の具体的計算に取り組んだ。階数が 2 及び 3 の場合に、KT 重複度をイデアルの混合重複度を用いて表す公式を得た。これは、Kirby-Rees の公式として知られている巡回加群の直和の BR 重複度公式の KT 重複度への拡張と見なせる。階数が 4 以上の場合の KT 重複度については、階数 3 までの計算過程から混合重複度を用いた表示が可能と予想されるが、公式を得るには至っていない。今後の課題である。

(5) 加群の重複度研究に関連して、多重次数付き環拡大の斉次成分に付随する長さに限らない不変量、特に grade や随伴素イデアルの漸近挙動について研究を行い、得られた結果を論文として纏め発表した(雑誌論文、学会発表)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Futoshi Hayasaka,
A computation of Buchsbaum-Rim functions of two variables in a special case, Rocky Mountain Journal of Mathematics (掲載決定), 査読有り

Futoshi Hayasaka,
Asymptotic periodicity of primes associated to multigraded modules, Communications in Algebra, Volume 42, Issue 6, 2014, pp.2769-2778, 査読有り

Futoshi Hayasaka,
Asymptotic periodicity of grade associated to multigraded modules, Proceedings of the American Mathematical Society 140, 2012, pp.2279-2284, 査読有り

[学会発表](計 8 件)

早坂 太,

加群の2変数ブックスバウム・リム関数の計算, 日本数学会, 2014年9月26日, 広島大学(広島県・東広島市)

早坂 太,

A computation of Buchsbaum-Rim multiplicities in a special case, 第35回可換環論シンポジウム, 2013年12月6日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

早坂 太,

加群の重複度と整閉包, 明治大学大学院集中講義, 2013年9月2日-9月5日, 明治大学(神奈川県・川崎市)

早坂 太,

Buchsbaum-Rim multiplicity and its generalization, 南九州代数系集会, 2013年8月30日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市)

早坂 太,

次数付き環拡大に付随する重複度の計算, 第25回可換環論セミナー, 2013年2月2日, 奈良県新公会堂(奈良県・奈良市)

早坂 太,

巴系加群に付随する関数と重複度の計算, 明治大学可換環論セミナー, 2013年1月19日, 明治大学(神奈川県・川崎市)

早坂 太,

多重次数付き加群の素イデアルの漸近的周期性, 日本数学会, 2012年9月21日, 九州大学(福岡県・福岡市)

早坂 太,

次数付き環拡大に付随する関数と重複度の計算, 明治大学可換環論セミナー, 2012年9月8日, 明治大学(神奈川県・川崎市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

早坂 太 (HAYASAKA Futoshi)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号: 20409460

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし