

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 17 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740034

研究課題名(和文)多様体の崩壊に対するホッジ・ラプラシアン固有値の極限の研究

研究課題名(英文) Studies on the limit of the eigenvalues of the Hodge-Laplacian under collapsing of Riemannian manifolds

研究代表者

高橋 淳也 (Takahashi, Junya)

東北大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：10361156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクト Riemann 多様体が崩壊した際に、対応する Hodge-Laplacian の固有値の極限について研究を行った。特に、同じ境界を持つ 2つの境界付き Riemann 多様体を境界で貼り合わせ、その一方を1点に潰す場合を考察した。その結果、崩壊する Riemann 多様体の Hodge-Laplacian の全ての正の固有値が、極限空間上のある Hodge-Laplacian の全ての正の固有値に収束することを証明した。また、0 に収束する固有値の重複度を与える指数公式も得た。

以上の成果は、Colette Ann'e 氏(フランス、ナント大学)との共同研究である。

研究成果の概要(英文)：We study the limit of the eigenvalues of the Hodge-Laplacian, when a compact Riemannian manifold collapses. In particular, we study the following collapsing of Riemannian manifolds: we take a compact Riemannian manifold obtained by gluing two compact manifolds with the same boundaries, and one part of the resulting Riemannian manifold uniformly collapses to a point. Then, we prove that all of the positive eigenvalues of the Hodge-Laplacian for collapsing Riemannian manifolds converge to all of those of a suitable Hodge-Laplacian on the limit space. We also obtain an index formula for the multiplicity of eigenvalues which converge to 0.

These results are joint works with Colette Ann'e (Universit'e de Nantes, in France).

研究分野：幾何学

キーワード：スペクトル幾何学 ラプラシアン 固有値 微分形式 リーマン多様体の崩壊 特異点

## 1. 研究開始当初の背景

Gromov は 1970 年代後半に、コンパクト距離空間 ( の等長類 ) 全体の集合に Gromov-Hausdorff 距離と呼ばれる距離を定義し、距離空間全体の集合を 1 つの距離空間として捉え、各距離空間の族に共通する幾何学的性質を研究した。特に Riemann 多様体はその Riemann 計量から自然に距離空間の構造を持つので、コンパクト Riemann 多様体も 1 つの距離空間として考えることが出来る。このような考察において特に重要な定理として、Gromov の全有界性 ( プレコンパクト性 ) 定理がある。すなわち、次元を固定し、Ricci 曲率の下限と直径の上限が一樣に有界であるコンパクト Riemann 多様体の族は、Gromov-Hausdorff 距離に関して全有界である。従って、( 部分列を取れば ) 常に極限空間の存在が保証される。ただし、極限空間は一般に多様体とは限らず、特異点が現れる。また、極限空間の次元は元の多様体の次元以下となるが、次元が同じ場合は Riemann 多様体が退化すると言ひ、次元が下がる場合を崩壊と言う。

一方、各コンパクト Riemann 多様体には Hodge-Laplacian と呼ばれる微分形式に作用する楕円型微分作用素が定まり、そのスペクトルは非負の固有値 ( 点スペクトル ) で与えられる。このとき、各固有値には Riemann 多様体の幾何学的情報が反映されるが、その幾何学的情報を解明することがスペクトル幾何学の基本的な問題である。特に、微分形式の場合である Hodge-Laplacian を考察すると、de Rham-Hodge-Kodaira 理論から、0 固有値の重複度は多様体の Betti 数という位相的情報を持つことが、微分形式の場合の最大の特徴である。

では、Riemann 多様体を動かすと、Laplacian の固有値はどのように振る舞うのであろうか？

関数に作用する Laplacian の固有値の収束に関しては、深谷賢治氏 (1987 年) の結果が画期的である。深谷は、測度付き Gromov-Hausdorff 収束という概念を導入し、その位相に関して、断面曲率が一樣に有界な場合に、固有値の収束を示した。その後、Cheeger-Colding (2000 年) により、曲率の条件は Ricci 曲率の下限が一樣に有界という条件まで弱められた。

しかし、この問題を微分形式に作用する Hodge-Laplacian で考えた場合、極限の記述は測度だけでは不十分であり、さらなる付加構造が必要である。実際、極端に次元が下がる崩壊の場合、微分形式の次数が極限空間の次元を超えてしまい、極限空間の距離と測度のみではもはや捉えきれない。

そこで、John Lott (2002 年) は Hodge-Laplacian の固有形式の極限を記述するための付加構造として、Riemann 多様体の崩壊列から定まる平坦ベクトル束とその計量、そして、superconnection と呼ばれ

る平坦束に値を持つ微分形式に作用する微分作用素 ( 平坦接続 ) の 3 つ組を考え、これらの収束に対して、対応する Hodge-Laplacian の固有値と固有形式の極限を記述した。これは Hodge-Laplacian の固有値の収束問題において、画期的な仕事であった。

しかし、この結果は断面曲率が一樣に有界であり、極限空間も多様体の時のみという仮定が必要であること、また、存在を述べる抽象的な議論が中心で、固有値や固有形式の具体的な現象を調べるには不向きである。

そこで、研究代表者は Hodge-Laplacian の固有値を深く理解するために、Lott の結果では捉えることの出来ない場合、すなわち、断面曲率が一樣に有界でない場合に、Hodge-Laplacian の固有値の極限とその幾何学的性質を調べることを試みた。実際、断面曲率の仮定を外すことで現れる様々な幾何学的現象が、Hodge-Laplacian の固有値にどの様に影響しているのかを調べるためである。

その中でも特に、崩壊において、正の固有値で 0 に収束する「小さい固有値」や、無限大に発散する「大きい固有値」などの特別な固有値に着目し、これらの固有値の存在条件や具体例などを調べた。実際、小さい固有値や大きい固有値の存在・非存在には、多様体のトポロジーが深く関わっているが、その全容は不明な点が多いためである。従って、これらの具体例の構成も、Hodge-Laplacian の固有値の重要な研究課題である。

研究代表者は、これまでの研究において、断面曲率が下に一樣に有界な崩壊の下で、偶数次元球面に小さい固有値の存在を示した。また、大きい固有値に対しても、球面を含むある多様体のクラスで存在することを示した。特に、球面の例は基本的であると同時に、興味深く重要な例である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、スペクトル幾何学の基本的で重要な問題「Riemann 多様体上の Laplacian のスペクトルの持つ幾何学的情報・性質を解明せよ」を、微分形式の場合の Hodge-Laplacian に対して実行することである。微分形式の場合は、de Rham-Hodge-Kodaira 理論により、スペクトルに多様体の位相的性質が反映されることが最大の特徴である。

この問題を解明するために我々の用いる手法は、一つの固定された Riemann 多様体を考えるのではなく、Riemann 多様体を潰すなどの計量の変形を行った際に、対応する Laplacian のスペクトルの挙動や極限の状況を調べることである。このとき、スペクトル ( 固有値 ) に反映される位相的・幾何的性質の変化が顕著に生じる場合に着目し、それについて詳細に調べることである。

### 3. 研究の方法

#### (1) 共同研究者との議論

本研究の一部は、Colette Anné 氏（フランス・ナント大学）と共同で行う。その方法は、普段は電子メールを用いてお互いの議論のやりとりを行う。さらに、実際に訪問または招聘して、より深い議論を行う。

#### (2) 研究集会への出席

本研究に関係する幾何学および解析学の研究集会に出席し、新しい知識やアイデアを収集すること。同時に、出席者との議論を行う。

#### (3) モバイル機器による効率化

共同研究者を含め国内外の専門家とインターネットを通して議論を行うため、新たにノートパソコンやモバイル機器等を購入して、研究の効率化を図る。

### 4. 研究成果

研究代表者の高橋淳也は、Colette Anné 氏（フランス・ナント大学）と共同で、コンパクト Riemann 多様体が崩壊した際に、対応する微分形式に作用する Hodge-Laplacian の固有値と固有形式の極限についての研究を行った。

我々が考察した崩壊は、一般化された連結和の崩壊と呼ばれる、同じ境界を持つ 2 つの境界付き Riemann 多様体を境界で貼り合わせ、その一方を 1 点に様に潰す場合である。このとき、貼り合わせの部分は Euclid 的な錘 (Euclidean cone) として潰れて行き、極限空間には錘型特異点 (conical singularity) が現われる。この変形は、錘への退化 (conic degeneration) と 1 点への崩壊が混在した状況であり、また、錘型特異点の特異点解消の空間のプロダクトとも見ることができ、特異点が生じる典型的な状況である。

我々はこの崩壊に対して、対応する Hodge-Laplacian の全ての正の固有値とその固有形式が、極限空間上に適切に定義した Hodge-Laplacian の全ての正の固有値とその固有形式に収束することを証明した。さらに、0 に収束する固有値 (小さい固有値と言う) の重複度を、幾何学的な情報により記述する指数公式を得た。こうして、全ての固有値の極限を完全に決定することができた。

また、小さい固有値を持つ多様体の具体例を沢山構成した。例えば、球面やその直積、さらにそれらの有限個の連結和などの基本的な多様体に対して、小さい固有値の存在を示した。

ここで特筆すべきことは、2 つの多様体を貼り付ける多様体のトポロジーの状況に応じて、錘の頂点に固有形式のノルムが集中す

る現象が起こることである。この現象は、我々が初めて発見した現象であり、専門家も驚く興味深い結果であった。しかし、この現象の一般的な仕組みの解明までは至らず、この部分の詳細な研究は今後の課題である。

なお、我々の用いた証明方法は、固有形式の関数解析的な手法、いわゆる、 $L^2$ -解析を用いる方法である。特に、弱極限の存在を示すために、固有形式の族に対する一様な  $H^1$ -評価を得る必要があるが、これを得る事が最大の難関であった。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

[1] Colette Anné and Junya Takahashi, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-de Rham operator, *Analysis & PDE*. 8 (2015), 1025-1050. (査読有).  
<http://dx.doi.org/10.2140/apde.2015.8.1025>

[2] Colette Anné and Junya Takahashi,  $p$ -spectrum and collapsing of connected sums, *Transactions of the American Mathematical Society*, 364 (2012), 1711-1735. (査読有).  
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05351-1>

[学会発表](計 4 件)

[1] 高橋淳也, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-Laplacian, リーマン幾何と幾何解析, 2014 年 3 月 7 日, 筑波大学 (茨城県つくば市).

[2] 高橋淳也, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-Laplacian, 幾何セミナー, 2013 年 10 月 22 日, 東北大学理学部 (宮城県仙台市).

[3] 高橋淳也, 一般化された連結和の崩壊と Hodge-Laplacian の固有値の収束, 第 60 回幾何学シンポジウム, 2013 年 8 月 27 日, 東京工業大学大岡山キャンパス (東京都目黒区).

[4] Junya Takahashi, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-de Rham operator, *Geometry and Probability*, 2013 年 8 月 8 日, 京都大学理学部 (京都府京都市).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況 (計 0 件)

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~junya/>

6．研究組織

(1)研究代表者

高橋 淳也 (TAKAHASHI, Junya)

東北大学・大学院情報科学研究科・助教

研究者番号：10361156

(2)研究分担者

(3)連携研究者