

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：32682

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740035

研究課題名(和文) 結び目群間のメリディアンを保たない全射準同型に関する研究

研究課題名(英文) On epimorphisms between knot groups non-preserving meridians

研究代表者

鈴木 正明 (SUZUKI, Masaaki)

明治大学・総合数理学部・准教授

研究者番号：70431616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において、三つ葉結び目と呼ばれる結び目の結び目群へメリディアンを保たない全射準同型をもつ素な結び目を無限個構成することができた。さらにこれらの結び目はそれぞれ三つ葉結び目へメリディアンを保つ全射準同型は決して持たないことも証明することができる。同じ主張が八の字結び目と呼ばれる結び目に対しても成立する。

研究成果の概要(英文)：In this research, we construct infinitely many examples of prime knots which admit non-meridional epimorphisms onto the trefoil knot. Moreover these knots never admit meridional epimorphisms onto the trefoil knot. This statement holds for the figure eight knot too.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目群 メリディアン

1. 研究開始当初の背景

S^3 内への S^1 の埋め込みを結び目と呼ぶ。結び目は位相幾何学において重要な研究対象であり、3次元多様体との関連から様々な研究がおこなわれている。さらにそのような動機だけではなく、生物学や化学への応用なども幅広く研究されている。その結び目の研究に置いて中心的な問題は、結び目を判定することにあると言ってよいだろう。すなわち二つの結び目が同じ結び目か否かを判定するという問題である。これにはいくつかの不変量が利用されるが、そのうち最も基本的な不変量と言ってもよい結び目群がある。結び目群は結び目の補空間の基本群として定義され、それが同型でなければ、結び目は同じではない。よって結び目が異なることを判定する基準になり得るが、一般に群が同型であるかを判定すること自体も難しいことが多い。そこで本研究では結び目群間の全射準同型の存在に関して研究を行った。結び目群間に全射準同型が存在することは同型の必要条件であり、群が同型でないとしても、非常に密接な関係があると言ってよい。

素な結び目 K に対して、その結び目群を $G(K)$ で表す。すなわち、 S^3 における K の補空間の基本群を $G(K)$ とする。二つの結び目群 $G(K_1)$ と $G(K_2)$ の間に全射準同型が存在するとき、

$$G(K_1) \twoheadrightarrow G(K_2)$$

と表すことにすると、この二項関係 \twoheadrightarrow は素な結び目の集合上の半順序になることが知られている。これは結び目群が Hopfian であることと、Whitten の定理と Gordon-Luecke の定理から示される。

また、 μ_K を結び目 K のメリディアンとする。すなわち、結び目の管状近傍である $K \times D^2$ の境界上に基点 $*$ を取り、 α_K を $* \times \partial D^2$ とホトピックで K と絡み数が 1 のものとし、 $[\alpha_K] = \mu_K$ とする。結び目のメリディアンを保つ、すなわちメリディアンの像がメリディアンとなる全射準同型が存在するとき、

$$G(K_1) \twoheadrightarrow_{\mu} G(K_2)$$

と表すと、特に \twoheadrightarrow_{μ} も半順序になる。

Kirby の問題集にはそれぞれの結び目群から全射準同型がある結び目は有限個かという問題が掲載されている。この問題は Simon 予想と呼ばれていたが近年 Agol-Liu によって肯定的に解決された。また、3次元多様体の基本群間の全射準同型や、Silver-Whitten}によって結び目群間の全射準同型が研究され、それらを始めとして近年、結び目群間の全射準同型について活発に研究がなされている。

これまでにメリディアンを保つ全射準同型

の存在に関する半順序 \twoheadrightarrow_{μ} については、10 交点以下の素な結び目の集合上で完全に決定されている。この論文ではメリディアンを保つ全射準同型が存在する場合には具体的にそれを構成し、存在しない場合は Alexander 多項式やねじれ Alexander 多項式を用いてメリディアンを保つ全射準同型が存在しないことを示している。さらにこの結果は 11 交点以下の結び目に対して拡張されている。これらの結果においては結び目のメリディアンを保つ全射準同型のみ考察しており、メリディアンを保たない全射準同型については考察されていない。

また特に 2 橋結び目と呼ばれる結び目に対しては Ohtsuki-Riley-Sakuma や Lee-Sakuma によってある性質(上側メリディアンを保つ)を満たす全射準同型について研究されている。ここで上側メリディアンを保つという条件からメリディアンを保つという条件は必ず満たされる。

ここでも二つの 2 橋結び目の結び目群の間に上側メリディアンを保つという性質を満たさない全射準同型はあるのかということの研究がされていないため、2 橋結び目においてメリディアンを保たない全射準同型はあるのかということについては知られていない。

2. 研究の目的

これまでの半順序 \twoheadrightarrow_{μ} の決定から、さらに研究を進めて、 $G(K_1) \twoheadrightarrow_{\mu} G(K_2)$

だが

$$G(K_1) \twoheadrightarrow_{\mu} G(K_2)$$

は成り立たない、すなわちメリディアンを保たない全射準同型しか存在しないという場合について考察する。

これまでメリディアンを保つ全射準同型とメリディアンを保たない全射準同型が同時に存在するような結び目の組は知られていない。よって、これまで考察されているメリディアンを保つ全射準同型が存在する結び目の組に対してもメリディアンを保たない全射準同型が存在するかを検証する。

さらに 2 橋結び目に対して、上側メリディアンを保たない全射準同型が存在するかを調べる。対象とする結び目を 2 橋結び目に制限すれば、計算がより多くできるので 10 交点よりも多く交点がある場合についても検証することができる。

3. 研究の方法

結び目群はメリディアンとその共役な元で生成されることが知られている。実際、Wirtineger 表示と呼ばれる結び目群の表示

においては生成元はすべてメリディアンと共役な元である。初年度においてはメリディアンのようにその元とその共役な元で結び目群が生成できるような元について考察する。そのような元は擬メリディアンとも呼ばれ、いくつかの条件を満たす結び目(トールス結び目、2 橋結び目、結び目解消数 1 の双曲結び目)の結び目群には擬メリディアンは無数あることが知られている。

まず、どのような元が擬メリディアンになるかを考察し、その考察を用いて、メリディアンを保つ全射準同型を構成した時と同様に、メリディアンを擬メリディアンに写す全射準同型を構成する手法を考える。ただし、メリディアンを保つ全射準同型であれば、メリディアンの像をメリディアンであると固定して計算を始めることができるが、%メリディアンを擬メリディアンに写す全射準同型を構成する際には、そのような仮定をおけないため、メリディアンを保つ全射準同型を構成した時よりも高性能の計算機(コンピュータ)を用いて構成を試みる。

計算機で準同型を探し出す際には、計算機上でいわゆる語の問題を解く必要がある。結び目群においては語の問題は解けるということが知られているが、具体的なアルゴリズムは簡単ではない。この意味で組み合わせ群論的な考察が必要で、そのための位相幾何学を始め、幾何的群論や組み合わせ群論などの専門図書を参照しながら効果的なアルゴリズムについて考察する。

上記の研究結果を用いて、メリディアンを保たない全射準同型の構成を試みる。さらにそのような例を数多く構成することにより、今まで知られていない種類の全射準同型を構成する。

4 . 研究成果

本研究において、三つ葉結び目と呼ばれる結び目と八の字結び目と呼ばれる結び目の結び目群へ、メリディアンを保たない全射準同型をもつ素な結び目を無数構成することができた。さらにこれらの結び目はそれぞれ三つ葉結び目と八の字結び目にメリディアンを保つ全射準同型は決して持たないことも証明した。

さらに、ねじれ結び目(twist knot)と呼ばれる結び目のクラスに対しては、必ずメリディアンを保たない全射準同型が存在することを示し、その具体的な例を示した。これは、まずねじれ結び目の擬メリディアンを具体的に構成し、それがメリディアンではないことを証明することにより示されている。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces, Quantum Topology, 6 (2015), 139-138. 査読あり

Masaaki Suzuki, Meridional and non-meridional epimorphisms between knot groups, Handbook of Group Actions, Advanced Lectures in Mathematics, 31 (2015) 577-602. 査読あり

Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki, Integral Euler characteristic of $Out F_{11}$, Experimental Mathematics, 24 (2015), 93-97. 査読あり

Hiroshi Goda, Masaaki Suzuki, Monodromy maps of fibered 2 -bridge knots as elements in Automorphism of free groups (joint work with H. Goda), to appear in Kyungpook Mathematical Journal. 査読あり

Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra, Duke Mathematical Journal, 162 (2013), 965-1002. 査読あり

Takayuki Morifuji, Masaaki Suzuki, A note on degrees of twisted Alexander polynomials II, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 50 (2013), 929-934. 査読あり

[学会発表](計 4 件)

Masaaki Suzuki, Meridional and non-meridional epimorphisms between knot groups, Departmental Colloquia, Department of Mathematics and Statistics, University of South Alabama, USA, 2014/10/30.

Masaaki Suzuki, Meridional and non-meridional epimorphisms between knot groups, Topology Seminar, Indiana University, USA, 2013/10/2.

Masaaki Suzuki, Meridional and non-meridional epimorphisms between

knot groups, Geometry Seminar,
University of Pisa, Italy, 2013/3/14.

Masaaki. Suzuki, Meridional and
non-meridional epimorphisms between
knot groups, Group actions and
applications in geometry, topology and
analysis, Kunming, China, 2012/7/23.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

鈴木 正明 (SUZUKI, Masaaki)

明治大学・総合数理学部・准教授

研究者番号：70431616