

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740040

研究課題名(和文) 曲面のホモロジー同境界群と付随するグラフのリー代数の構造の研究

研究課題名(英文) Homology cobordism groups of surfaces and Lie algebras of associated graphs

研究代表者

逆井 卓也 (Sakasai, Takuya)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60451902

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：曲面のホモロジー同境界群とそれに付随する(リー型の)グラフのリー代数の構造について、森田茂之氏と鈴木正明氏との共同研究により、リー代数のオイラー数を計算機を用いた大規模計算により調べ、階数が11までの自由群の外部自己同型群について、一次独立な奇数次の有理ホモロジー類が大量に存在することを証明した。類似のリー代数についてもいくつかの結果が得られている。リー代数の構造そのものについても、シンプレクティック群の表現論を用いて次数6までの詳細な構造を決定した。ホモロジー同境界群の構造については、無限小トレース準同型の定義の改良(G. Massuyeau 氏との共同研究)や高次元の場合の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：We studied the structure of the Lie algebra of graphs (of Lie types) associated with homology cobordism groups of surfaces.

In joint works with Shigeyuki Morita and Masaaki Suzuki, we investigated the chain complex of the Lie algebra to compute its Euler characteristic by using (super) computers. Our computational results show that there exist many non-trivial odd dimensional rational homology classes of the outer automorphism groups of free groups of ranks up to 11. Some results on Lie algebras of similar types are also obtained. We clarified the structure of the Lie algebra itself up to degree 6 by using symplectic representation theory.

As for the structure of homology cobordism groups, we extended the definition of infinitesimal trace homomorphisms in a joint work with G. Massuyeau for surface cases. We also studied higher dimensional generalizations.

研究分野：位相幾何学

キーワード：グラフホモロジー ホモロジー同境界 モジュライ空間 位相幾何学

1. 研究開始当初の背景

(1) 位相幾何学において、多様体と呼ばれる図形を分類することは基本的かつ重要な問題である。3次元の多様体をホモロジー同境という関係を基準にして分類することを考えるとき、曲面のホモロジー同境群 H の群構造は1つの効率的な分類手段を与える。この群は1995年に Garoufalidis と Levine によって定義されて以来、3次元多様体の有限型不変量との関係が主に調べられていたが、群構造そのものに関しては基本的な事項を含めて未知の部分が多く残されていた。とくに、群 H の構造解明において重要なステップとして、有理アーベル化が自明か否かを決定することが重要な問題となっていた。

(2) 曲面のホモロジー同境群 H の構造を調べる上で鍵となるのは、付随する(リー型の)グラフのなすリー代数 h の構造解明である。類似したリー代数として結合型 a や可換型 c があり、これらのリー代数はどれも対応する自由代数のシンプレクティック微分のなすリー代数としての代数的解釈を持っている。グラフのリー代数については Kontsevich のグラフホモロジーの理論により、結合型のリー代数 a のホモロジーはリーマン面のモジュライ空間の有理コホモロジー(位相的には曲面束の特性類とも解釈される)と、リー型のリー代数 h についてはグラフのモジュライ空間の有理コホモロジー(自由群の外部自己同型群の有理コホモロジーとも言い換えられる)と対応していることが示されており、古くから活発に行われているモジュライ空間の中心的問題であるコホモロジーの決定問題に直接的に関連している。しかしながら、複体の次元が非常に大きくなるという理由から、その対応を使つての具体的な計算結果はほとんど得られていなかった。

2. 研究の目的

上記のような状況において本研究では、

(1) リー型のグラフのなす次数つきリー代数 h の構造を、計算機を利用しつつ、次数8まで具体的に決定する。(研究開始時点で次数5までは決定できていた。)

(2) リー代数 h のアーベル化(1次ホモロジー群)、更には高次ホモロジー群の決定。

(3) リー代数 h と a の類似した部分、異なる部分を明確にし、リーマン面のモジュライ空間とグラフのモジュライ空間をコホモロジーの観点から関連づける。

(4) 曲面のホモロジー同境群のアーベル化の決定

を研究目的として設定していた。

3. 研究の方法

(1) グラフのリー代数 h の構造を計算機で調べるためのプログラムを準備し、次数6以降について具体的な計算を行った。更に、森田茂之氏によって導入されたシンプレクティック加群の作用不変部分に関する自然な計量を研究手段に加え、リー代数のより精密な構造を調べた。

(2) 当初は、結合型のリー代数 a に対して論文で行ったように、まず次数正の部分を決し、そのシンプレクティック作用自明部分をとることでリー代数 h のアーベル化の構造を決定する計画であったが、研究期間中に発表された Conant-Kassabov-Vogtmann の論文において、次数正の部分のアーベル化を調べるための洗練された理論が構成され、その結果として、次数正の部分のアーベル化がこれまでに想定されていたものよりも更に大きいことが判明した。しかしながら彼らのアプローチを持ってしてもアーベル化のシンプレクティック不変部分を決定することは依然として難しく、研究方法を変更せざるをえなくなった。そこで、整オイラー数の計算を通じて非自明なホモロジー類の存在を示すことに注力した。

(3) 研究発表のため、Strasbourg 大学(フランス)や Oberwolfach 数学研究所(ドイツ)を訪問し、そこで行われた国際学会において講演を行った。加えて、現地の数学者や集会の参加者との議論を通じて様々な知見を得るとともに、最新の情報の収集を行った。とくに Strasbourg 大学の Gwenael Massuyeau 氏とは「無限小トレース準同型」という、群 H とリー代数 h のアーベル化を直接的に繋ぐ道具の構成に関して、その定義の拡張と応用に関する共同研究を行った。また、国内においてもいくつかの研究集会や談話会において招待講演を行った。

4. 研究成果

以下の(1)から(3)は森田茂之氏、鈴木正明氏との共同研究の中で得られたものである。

(1) シンプレクティック群の表現論を用いてグラフのリー代数 c , h のチェイン複体の構造を調べ、複体のオイラー数をウェイトの低い方から順番に決定していった(論文)。その系として、可換型 c の場合には3価グラフのみでは得られない非自明な奇数次のグラフホモロジー類が、リー型 h の場合には階数8, 9, 10の自由群の外部自己同型群について非自明な奇数次の有理コホモロジー類が存在することが証明できた。後者の結果について、非自明な奇数次の有理コホモロジー類の存在はこれまでに知られていなかった事実である。論文はリー型 h の

場合の計算を更に一步進めたものであり、東京工業大学の小島定吉氏と高沢光彦氏にご協力いただいて大型計算機を用いた計算を行い、階数 1 の自由群の外部自己同型群の整オイラー数を決定した。この結果より一次独立な奇数次の有理ホモロジー類が少なくとも 1203 個存在することが従う。

(2) リー型 h の場合には、アーベル化の決定に加えて次数 1 部分が生成する部分リー代数の決定が大きな問題となっている。後者は曲面の写像類群のジョンソン準同型の像の決定問題と言うこともでき、低次元位相幾何の研究の観点からも重要である。どちらの問題についても、具体的な計算を通じて、次数 6 までの構造を完全に決定することができた(学会発表)。その際に次数 5 までのところでは見られなかった現象が観察され、次数 7 の情報の一部を用いることとなった。いくつかの結果についてはより高次の場合にも適用することができる。さらに、微分リー代数のシンプレクティック作用に関する不変部分空間について、その空間に入る自然な内積による直交直和分解の構造を調べた。これによりリー型 h の次数 6 部分を中心に、榎本-佐藤障害の情報を含む、より精密な構造に関する理解が得られた。さらにリー代数 h の種数ごとの構造について、とくに振る舞いの異なる種数が 1 の場合と高種数の場合の関係性に注目し、ジョンソン準同型や榎本-佐藤障害との関連を調べた。本研究内容についてはプレプリントとしてまとめ、発表した(arXiv:math.AT/1404.3351)。

(3) 結合型のリー代数 a の場合のオイラー数の計算については、他の型の場合でも用いた一般的方法よりも、Gorsky による穴あきリーマン面のモジュライ空間の同変オイラー数の理論を用いた計算法の方が極めて有用であることが分かった。それを利用するためにまず理論を整理し、計算機を用いてオイラー数の計算を行ったところ、その結果が興味深い漸近的振る舞いをするのが観察された。そこで、実験的に得られていたデータを精査し、その漸近挙動についての予想を定式化した。学会発表、はその予想の部分的な解決を得たことを報告したものである。また、写像類群のコホモロジー環に含まれるトートロジー環を表現論の立場から理解することについて、これまでに知られていたものとは異なる種類の表現の安定性との関連を見つけた。その退化の様子からトートロジー環の関係式が量産できると期待される。

(4) 曲面の一般化とみなされるある一連の多様体のホモロジー同境のなす群について、そのアーベル化が有限生成でないことを証明した(論文)。その方法は曲面の場合には適用することができず、曲面のホモロジー群が持つシンプレクティック対称性の不思議

さを浮き彫りにする形となった。この研究の中で、ホモロジー同境群の代数的アナロジーである自由群の algebraic closure, acyclic closure やその自己同型群の構造に関して、そのどれもが有限生成でないことを証明することができた。

(5) Gwenael Massuyeau 氏との共同研究において、これまでに得られていた曲面のホモロジー同境群 H における無限小トレース準同型を、string link などを含めたより広い対象に適用できるよう定義を改良した(学会発表)。得られた準同型の位相的意味や応用については今後の課題となったが、種数 1 の場合の群 H の構造解明や、論文で調べたホモロジーファイバー結び目の不変量の構成に有効な手段となりうるということが分かった。

(6) 阿原一志氏と共著で、曲面の写像類群に関する入門的事項をまとめた書籍(図書)を出版した。

以上の結果を研究の目的の項目で述べた内容と比較すると、最終的な目標である群 H やリー代数 h のアーベル化の決定までは残念ながら達することができなかったものの、それに至る部分的な結果は得られている。またいくつかの事項についてはそれ自身が今後の研究に繋がるようなものとなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Shigeyuki Morita, Masaaki Suzuki, Takuya Sakasai, Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces, Quantum Topology, 査読有, 6 (2015), 139-182.

Shigeyuki Morita, Masaaki Suzuki, Takuya Sakasai, Integral Euler characteristic of Out F_{11} , Experimental Mathematics, 査読有, 24 (2015), 93-97.

Takuya Sakasai, The Magnus representation and homology cobordism groups of homology cylinders, Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 査読有, 印刷中, (2014).

Shigeyuki Morita, Masaaki Suzuki, Takuya Sakasai, Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra, Duke Mathematical Journal, 査読有, 162 (2013), 965-1002.

Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Homology cylinders and sutured manifolds for homologically fibered knots, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 36 (2013), 85-111.

〔学会発表〕(計 13 件)

Takuya Sakasai, Computations of integral Euler characteristics in graph homologies, Moduli space, conformal field theory and matrix models, 2015年3月16日, 沖縄科学技術大学院大学(沖縄県国頭郡恩納村).

逆井 卓也, Thompson 群の分類空間の位相について, 無限離散群と量子トポロジー, 2014年12月13日, 文部科学省共済組合箱根宿泊所(神奈川県足柄下郡箱根町).

Takuya Sakasai, A generalization of Morita's trace homomorphisms and applications, 日仏共同「写像類群とTeichmueller空間の幾何」小研究集会, 2014年10月16日, 大阪大学(大阪府豊中市).

Takuya Sakasai, Structure of the symplectic derivation Lie algebra of a free Lie algebra, Mapping class groups of surfaces and automorphism groups of free groups, 2014年9月10日, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg (France).

Takuya Sakasai, Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces, New Trends in Teichmueller Theory and Mapping Class Groups, 2014年2月13日, The Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach (Germany).

逆井 卓也, Realization of representations of the Kauffman skein algebra, 曲面の写像類群に関連する幾何と代数, 2013年12月22日, 文部科学省共済組合箱根宿泊所(神奈川県足柄下郡箱根町).

逆井 卓也, シンプレクティック微分リー代数とモジュライ空間のコホモロジー, 群と幾何学の展望, 2013年10月13日, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市).

逆井 卓也, Symplectic derivation Lie algebras and cohomology of moduli spaces I, II, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2013年9月17, 18日, 京都大学数理

解析研究所(京都府京都市).

逆井 卓也, Computations of Euler characteristics of graph homologies in low weights, リーマン面に関連する位相幾何学, 2013年8月26日, 東京大学(東京都目黒区).

逆井 卓也, シンプレクティック微分リー代数とモジュライ空間のコホモロジー, 大岡山談話会, 2013年7月10日, 東京工業大学(東京都目黒区).

Takuya Sakasai, Johnson homomorphisms up to degree 6, 研究集会: ジョンソン準同型, 2013年6月3日, 東京大学(東京都目黒区).

Takuya Sakasai, Computations of Euler characteristics of graph homologies in low weights, Low-dimensional Geometry and Topology, 2012年9月13日, 東京工業大学(東京都目黒区).

逆井 卓也, 曲面のホモロジー同境界群と無限小トレース準同型, リーマン面に関連する位相幾何学, 2012年9月4日, 東京大学(東京都目黒区).

〔図書〕(計 1 件)

阿原一志, 逆井卓也, パズルゲームで楽しむ写像類群入門, 日本評論社, (2013), 332ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

逆井 卓也 (SAKASAI TAKUYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 60451902