様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１３１０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2013
課題番号：２４７４００４１
研究課題名（和文）Ｈｅｅｇａａｒｄ理論を用いた結び目の研究

研究課題名（英文）Research on knots using Heegaard theory

研究代表者
斎藤　敏夫（Saito, Toshio）

上越教育大学・学校教育研究科（研究院）・准教授

研究者番号：９０３９７６７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 1,500,000円、（間接経費）　 450,000円

研究成果の概要（和文）：Heegaard理論を通して，３次元閉多様体内の結び目・タングルがもつ位相的および幾何的性質に関する研究を行った．主な研究成果は次の通りである．(1) Heegaard理論の観点から自由タングルを考察することにより，２-タングル分解に関する森元の定理の主張を部分的に拡張した．(2) タングルにもトンネル数やブリッジ数の概念を導入し，結び目のそれらを評価する不等式を得た．(3) 任意に高いHempel距離を許容する橋分解をもつ結び目が任意に与えられた３次元閉多様体内に存在することを示した．(4) 本質的タングル分解に関する小沢の定理がある意味で拡張不可能であることを示した．

研究成果の概要（英文）：We studied topological and geometric properties of knots and tangles by using Heegaard theory. Our main results are the following. (1) Studying free tangles from a viewpoint of Heegaard theory, we partially generalized Morimoto's theorem on 2-tangle decompositions. (2) We defined tunnel number and bridge number of tangles as well as those of knots, and obtained relation among them. (3) We proved that there are bridge splittings of knots in a given 3-manifold with arbitrary high distance. (4) Ozawa's result on essential free 2-tangle decompositions cannot be generalized even if a knot admits an essential 2-tangle decomposition such that one of the decomposed tangles is of tunnel number one.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：３次元多様体　Ｈｅｅｇａａｒｄ分解　結び目　タングル

１．研究開始当初の背景

【結び目のレンズ空間手術に関する研究】

３次元多様体内の絡み目のデーン手術とは，絡み目の管状近傍を取り除いたものの各境界成分に沿ってトーラス体を貼り合わせる操作のことをいう．任意の３次元閉多様体は３次元球面内の絡み目のデーン手術で得られることがLickorishとWallaceにより独立に示されている．双曲結び目のデーン手術で双曲多様体を生じない手術は例外的デーン手術と呼ばれ，そのような手術をすべて決定することが一つの大きな問題となっている．しかしながら，「デーン手術でレンズ空間を生むような３次元球面内の結び目の決定」という基本的な問題でさえ多くの研究者を悩ませ続けている．これに関しては，Bergeが 1990 年頃にそのような結び目の組織的構成方法を与えており，それをふまえて「レンズ空間を生成するようなデーン手術(レンズ空間手術)を許容する結び目は Berge の構成法で得られるだろう」という，今日でいうレンズ空間手術予想が提唱されている．

最近では，Ozsváth-Szabó によるヘガードフレアホモロジー理論が応用され，レンズ空間手術に纏わる幾つかの大予想が次々に解決されるほどの強力な道具が得られている．しかしながら，レンズ空間手術予想そのものに対しては，依然として部分的解決に留まっており，なんらかの斬新なアイデアが必要と考えられている．

【結び目の複雑度に関する研究】

Heegaard理論の立場からみた「結び目の標準的位置」といえば，通常は(1) 結び目がHeegaard曲面に対して“ブリッジ”となるような位置，もしくは(2) Heegaard分解を与えるハンドル体の中心となる位置のいずれかを指す．これらはそれぞれブリッジ指数b(･)(≧１)，トンネル数t(・)(≧０)といった結び目の不変量と密接な関係がある．特に，Kが自明な結び目の場合は b(K)＝１，t(K)＝０であることから，ブリッジ指数やトンネル数という概念はそれぞれ結び目の「複雑さ」を表す指標であるといえる．

一方，Hempelによる2001年発表の論文では，Heegaard分解に対して「複雑度」の概念を導入することで，３次元多様体の位相的性質を見事に反映させることに成功している (cf. Topology, 40 (2001), 631-657)．これをきっかけとして，「複雑度」に関する研究は世界的に大きな流れとなり，一連の研究成果は結び目の研究にも応用され，現在も活発に研究が進められている．特に，結び目の連結和による Heegaard 種数の変化についての研究が中心となっている．たとえば，森元氏および小林-Rieck 両氏は meridional destabilization という操作(あるいはその操作が可能な状態)に注目し，当該研究を行ってきた (cf. J. Reine Angew. Math. 592 (2006), 63-78)．研究代表者は，彼らの研究から自然に考えられる概念として，結び目に対する meridional destabilizing number を導入した (cf. Algebr. Geom. Topol. 11 (2011), no. 2, 1205-1242)．大雑把に言えば，meridional destabilizationという操作は「結び目をある規則に従ってブリッジ状に折り畳むこと」に相当するといえる．そして，その操作が可能な回数md(･)が大きいほど結び目を“コンパクト”に折り畳むことができることを意味する．

このように，結び目の複雑さの度合いを表すさまざまな概念を用いて，結び目の「連結和」による位相的性質の変化を解明する試みが既に多くの研究者によって行われている．この「連結和」という概念は与えられた結び目から新しい結び目を作るための基本的な操作であり，非常に良く研究されている対象であるが，まだまだ未解明な部分も多く，研究の進展が期待されている．

２．研究の目的

３次元球面内の結び目によるデーン手術の研究において，多くの研究者が挑みながらも未解決である「レンズ空間手術予想」解決の糸口を探ることが本研究の第一目的である．

また，３次元閉多様体内の結び目に対して，Heegaard理論と密接な関係にある「ブリッジ指数」や「トンネル数」といった結び目の複雑さを表す指標を融合させることにより得られる新たな不変量に着目し，結び目の位相的および幾何的性質との関係を解明することを第二の目的とする．

３．研究の方法

【結び目のレンズ空間手術に関する研究】では，レンズ空間内の結び目およびデーン手術を考察するという立場から，Heegaard理論を通してレンズ空間手術の研究を進めることで，レンズ空間手術予想解決の糸口を探る．

また，【結び目の複雑度に関する研究】については， Tomovaにより導入されたc-weak reduction (cf. J. Lond. Math. Soc. (2) 80 (2009), 85-88) という操作がこれまでの研究でうまく機能しているので，同操作の精査を行い，必要に応じて改良を加える．さらに，応募者自身がこれまで多くの考察を重ねてきた Hempel 距離の概念を応用した複雑度の特徴付けを試みる．

４．研究成果

【結び目のレンズ空間手術に関する研究】においては，外部空間が種数２の Heegaard 分解を許容する 結び目のデーン手術により Heegaard 種数が落ちるための条件を改良することはできたが，鍵となる２曲面間の交差を完全に解消するための新たなる問題が見つかった．この問題はレンズ空間手術予想の解決へ向けた核心部分に近いものであると思われ，同予想解決へ向けた良い材料を得ることができた．

【結び目の複雑度に関する研究】については，以下の通りである．

(1)　Heegaard 理論の観点から自由タングルを考察することにより，２‐タングル分解に関する森元の定理（cf. Topology Appl. 64 (1995), 165-176 , J. Knot Theory Ramifications 10 (2001), 823-840）の主張を部分的に拡張した．具体的には，次の定理を証明した．

<u>定理</u> ＫとＬを３次元球面内の結び目とし，g をＬが(ｇ,２)‐分解を許容するような非負整数とする．

①　Ｋが次の性質(*)を満たす本質的自由２タングル分解Ｔ∪Ｔ’をもつならば，ＫとＫ’の連結和により得られる結び目は(ｇ＋３,０)‐分解を許容する．

(*)　ＴまたはＴ’のうち少なくとも一方が“まっすぐ”な成分を含む．

②　Ｋが次の性質(**)を満たす本質的自由２‐タングル分解Ｔ∪Ｔ’をもつならば，ＫとＫ’の連結和により得られる結び目は(ｇ＋２,１)‐分解を許容する．

(**)　ＴおよびＴ’が“まっすぐ”な成分を含む．

系として，森元結び目のトンネル数は２であり，meridional destabilizing number も２となることが得られ，一連の結果を論文[4]で発表した．

(2)　タングルにもトンネル数 tnl(･)やブリッジ指数 brg(・)の概念を導入し，結び目のそれらを評価する不等式を次の通り得た．結び目Ｋのｎ‐タングル分解Ｔ∪Ｔ’に対して，① Ｋのブリッジ指数は brg(Ｔ)＋brg(Ｔ’)－ｎ以下である．② Ｋのトンネル数は tnl(Ｔ)＋tnl(Ｔ’)＋２ｎ－１以下である．さらに，不等式②については等号が成り立たないような結び目を発見し，一連の結果を論文[2]で発表した．等号を成立させる結び目の存在は森元氏により予想されている（cf. Geom. Topol. Monogr. 12 (2007), 265-275）が，完全解決には至っておらず今後の課題である．

(3)　市原氏(日本大学)との共同研究により，任意に高い Hempel 距離を許容する橋分解をもつ結び目が任意に与えられた３次元閉多様体内に存在することを示した．系として，以前より問い掛けられていた問題に対して，次の通り解答を得ることができた： 任意の自然数ｔと非負整数ｍ（ただし，ｍ≦ｔ＋１）に対して，tnl(K)＝ｔかつ md(K)＝ｍ を満たす３次元球面内の結び目Ｋが存在する．本成果は論文[2]にまとめた．

(4)　タングルのトンネル数を用いることで，本質的タングル分解に関する小沢の定理 (cf. Proc. Appl. Math. Workshop 8 (1998), 227-232.)が次の意味で拡張不可能であることを示し，論文[1]で発表した．

<u>定理</u> 任意の非負整数ｎに対して，次の２条件を満たす３次元球面内の結び目Ｋが存在する．

①　Ｋは本質的タングル分解Ｔ∪Ｔ’(ただし，tnl(Ｔ)＝１，tnl(Ｔ’)＝ｎ）を許容する．

②　Ｋは①とは異なる本質的タングル分解を許容する．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

[1] <u>Toshio Saito</u>,
Essential tangle decompositions of knots with tunnel number one tangles,
Topology Appl.（査読有・印刷中）

[2] <u>Toshio Saito</u>,
Tunnel number of tangles and knots,
J. Math. Soc. Japan（査読有・印刷中）

[3] Kazuhiro Ichihara and <u>Toshio Saito</u>,
Knots with arbitrarily high distance bridge decompositions,
Bull. Korean Math. Soc. **50** (2013), no. 6, 1989-2000.（査読有）
DOI: 10.4134/BKMS.2013.50.6.1989

[4] <u>Toshio Saito</u>,
Free 2-tangles from the point of view of c-Heegaard splittings,
Topology Appl. **160** (2013), no. 1, 74-81.
（査読有）
DOI: 10.1016/j.topol.2012.09.016

〔学会発表〕（計２件）

[1] <u>斎藤 敏夫</u>，Meridional destabilizing number of knots，日本数学会秋季総合分科会，2013 年 9 月 24 日，愛媛大学

[2] <u>斎藤 敏夫</u>，Tunnel number of tangles

and knots，国際研究集会「International Conference on Topology and Geometry 2013」，2013 年 9 月 3 日，島根大学

〔その他〕
ホームページ
http://www.juen.ac.jp/math/saito/

６．研究組織
(1)研究代表者
斎藤　敏夫（SAITO，Toshio）
上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
研究者番号：９０３９７６７０