

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740043

研究課題名(和文)ミラー対称性の幾何学的研究

研究課題名(英文)Mirror symmetry

研究代表者

植田 一石(Ueda, Kazushi)

東京大学・数理科学研究科・准教授

研究者番号：60432465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：香港中文大学のKwokwai Chan氏およびImperial College LondonのDaniel Pomerleano氏と共同で、2次元のA型単純特異点や3次元の通常二重点に対して、非コンパクトなLagrange部分多様体を含む形でのホモロジー的ミラー対称性を証明した。また、香川大学の野原雄一氏と共同で、Grassmann多様体上の完全可積分系やそのFloer理論的な性質を研究した。さらに、Galatasaray大学の田邊晋氏と共同で、重み付き射影空間のCalabi-Yau超曲面に付随するGiventalのI関数のモノドロミーと、連接層の導来圏の自己同値の関係を調べた。

研究成果の概要(英文)：With Kwokwai Chan and Daniel Pomerleano, we have studied homological mirror symmetry for some toric Calabi-Yau manifolds. With Yuichi Nohara, we have studied integrable systems on Grassmannians and their Floer-theoretic properties. With Susumu Tanabe, we have studied the relation between monodromy of twisted I-functions of Calabi-Yau hypersurfaces in weighted projective spaces and autoequivalences of derived categories.

研究分野：幾何学

キーワード：ミラー対称性 シンプレクティック幾何学 代数幾何学

1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性は理論物理学の超弦理論に由来する数学的な現象で、ある空間の複素幾何学と別の空間のシンプレクティック幾何学の間に不思議な関係があることを指し、モチーフ積分や Gromov-Witten 不変量、三角圏の安定性条件などの様々な新しい数学を生み出すとともに、既存の多くの分野の発展を促してきた。このミラー対称性に関わる様々な現象に概念的な理解を与えるべく Kontsevich によって 1994 年の国際数学者会議で提案されたのがホモロジー的ミラー予想であり、その主張は次のようになる：任意の Calabi-Yau 多様体 M に対してある Calabi-Yau 多様体 W が存在して、 M の接続層の導来圏は W の深谷圏の導来圏と前三角 A_∞ 圏として同値になる。接続層の導来圏の対象は接続層の複体であり、射は層のコホモロジーであるのに対し、深谷圏の対象は Lagrange 部分多様体で、射は Floer コホモロジーである。この予想は、一見すると何の関係のないこれらの 2 つの圏の間に深いつながりがあることを主張している点で驚異的である。これはミラー対称性に関わる様々な予想の中で最も強いものの一つと考えられている重要な予想である。そのために証明が困難であり、その重要性にも関わらず、研究開始当初には成り立つことが証明されている場合は少なかった。

2. 研究の目的

- (1) ホモロジー的ミラー対称性を可能な限り多くの具体例に対して証明すること。
- (2) ダイマー模型と呼ばれる組合せ論的な対象の研究を進め、ホモロジー的ミラー対称性の研究に応用すること。
- (3) 完全可積分系やそのトーリック退化を研究し、ホモロジー的ミラー対称性の研究に応用すること。
- (4) Calabi-Yau 多様体の周期が定める超幾何関数のモノドロミーの研究にホモロジー的ミラー対称性を応用すること。

3. 研究の方法

ホモロジー的ミラー対称性を証明する基本的な方法は、接続層の導来圏と深谷圏の生成元を見つけて、生成元とそれらの間の射の空間の間に何らかの方法で対応をつけて、それが射の (高次も含めた) 合成と整合的であることを示すという

ものである。対応の付け方としては、手で選ぶというやり方の他に、Strominger-Yau-Zaslow 予想の文脈で、Lagrange トーラスファイブレーションを見つけて、それを用いて自然に決められる場合もある。

Lagrange トーラスファイブレーションは、Liouville-Arnold の定理により完全可積分系と非常に近い概念である。トーリック多様体の運動量写像が典型例であるが、トーリック多様体以外に対しても、手で Lagrange トーラスファイブレーションを作る方法の他に、あるいはトーリック多様体への退化を用いてトーラスファイブレーションを作る方法もある。

4. 研究成果

広島大学の石井亮氏と共同で、ダイマー模型に付随した関係付き籠の安定な表現のモジュライ空間が安定性を変えた時にどう振る舞うかを詳しく調べることにより、同語反復的直線束の直和がある安定性に対して傾対象であれば、一般の安定性に対してもそうであることを証明した。この事実を用いて、Abel 群の場合に Bridgeland-King-Reid による導来圏の同値としての McKay 対応の新しい証明が得られる。

また、石井亮氏及び New York 州立大学 Stony Brook 校の Charlie Beil 氏と共同で、任意のダイマー模型に対して、それに適当な操作を行うことによって、特性多角形と呼ばれる量を変えずに整合性条件を満たすように改変することが可能であることを証明した。

香港中文大学の Kwokwai Chan 氏との共同研究において、A 型の単純特異点に対するホモロジー的ミラー予想を証明した。この予想はコンパクトな台を持つ対象に対しては筆者の修士論文において示されたが、この共同研究においては、その後 Pascaleff によって証明された結果を用いて、コンパクトとは限らない対象に対してもホモロジー的ミラー予想を証明した。さらに、Chan 氏と Imperial College London の Daniel Pomerleano 氏と共同で、3次元の通常 2 重点のクレパントな特異点解消のミラーに Lagrange トーラスファイブレーションの構造を入れ、この場合のホモロジー的ミラー予想を証明した。

Galatasaray 大学の田邊晋氏と共同で、重み付

き射影空間内の Calabi–Yau 超曲面に付随する Givental の twisted I 関数のモノドロミーが、接続層の導来圏の自己同値が Grothendieck 群に引き起こす写像を用いて記述できることを明らかにした。

香川大学の野原雄一氏と共同で、多角形のモジュライ空間の上の bending system と呼ばれる完全可積分系が、射影直線上の階数 2 の安定放物ベクトル束のモジュライ空間上の Goldman 系と呼ばれる完全可積分系において放物荷重を適当に選んだものと完全可積分系として同型になることを示した。また、多角形のモジュライ空間は Grassmann 多様体のシンプレクティック商として得られ、bending system を持ち上げることによって Grassmann 多様体にも完全可積分系の構造が入る。この完全可積分系はトーリック多様体の運動量写像とよく似ているが、トーラスと同相でない Lagrange 部分多様体をファイバーに持つという際立った違いがある。筆者は野原氏と共同で、3次元の旗多様体と 4次元の Grassmann 多様体に対して、このトーラスでないファイバーの Floer コホモロジーを計算した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

1. Kwokwai Chan, Daniel Pomerleano and Kazushi Ueda, Lagrangian torus fibrations and homological mirror symmetry for the conifold, *Communications in Mathematical Physics*, Volume 341 (2016), Issue 1, 135–178.
2. Akira Ishii and Kazushi Ueda, Dimer models and the special McKay correspondence, *Geometry and Topology*, Volume 19 (2016), Number 6, 3405–3466.
3. Akira Ishii, Kazushi Ueda, The special McKay correspondence and exceptional collection, *Tohoku Mathematical Journal*, Volume 67 (2015), Number 4, 585–609.
4. Yuichi Nohara and Kazushi Ueda, Goldman systems and bending systems, *Canadian Journal of Mathematics*, Volume 67 (2015), 1109–1143.

5. Makiko Mase and Kazushi Ueda, A note on bimodal singularities and mirror symmetry, *Manuscripta Mathematica*, Volume 146 (2015), Issue 1, 153–177.
6. Tarig Abdelgadir and Kazushi Ueda, Weighted projective lines as fine moduli spaces of quiver representations, *Communications in Algebra*, Volume 43 (2015), Number 2, 636–649.
7. Masahiro Futaki and Kazushi Ueda, Tropical coamoeba and torus-equivariant homological mirror symmetry for the projective space, *Communications in Mathematical Physics*, Volume 332 (2014), Number 1, 53–87.
8. Kazushi Ueda, Hyperplane sections and stable derived categories, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 142 (2014), Number 9, 3019–3028.
9. Yuichi Nohara and Kazushi Ueda, Toric degenerations of integrable systems on Grassmannians and polygon spaces, *Nagoya Mathematical Journal*, Volume 214 (2014), 125–168.
10. Kwokwai Chan and Kazushi Ueda, Dual torus fibrations and homological mirror symmetry for A_n -singularities, *Communications in Number Theory and Physics*, Volume 7, Number 2 (2013), 361–396.
11. Susumu Tanabe and Kazushi Ueda, Invariants of hypergeometric groups for Calabi–Yau complete intersections in weighted projective spaces, *Communications in Number Theory and Physics*, Volume 7, Number 2 (2013), 327–359.
12. Masanori Kobayashi, Makiko Mase and Kazushi Ueda, A note on exceptional unimodal singularities and K3 surfaces, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2013, Issue 7 (2013), 1165–1690.
13. Yuichi Nohara and Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry for the quintic 3-fold, *Geometry and Topology*, Volume 16 (2012), 1967–2001.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

植田 一石 (Kazushi Ueda)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60432465