

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 10 月 21 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740047

研究課題名(和文) 周期的極小曲面の微分幾何学的モジュライ理論の研究

研究課題名(英文) Study of the moduli theory of periodic minimal surfaces in terms of differential geometry

研究代表者

庄田 敏宏 (Shoda, Toshihiro)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号：10432957

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はEuclid空間内の周期的な極小曲面，特に三重周期的極小曲面全体のモジュライ空間を，Morse指数という微分幾何学的量によって記述することを趣旨とするものであった．本研究課題期間にて，物理や化学で考察されていた変形族に対してMorse指数を数値計算で決定し，その構造を特定することができた．また，三重周期極小曲面の極限を考察し，ラメラ構造と呼ばれる周期的曲面の構造を数学的に記述することができた．さらに，3次元Euclid空間内の全曲率完備極小曲面の存在と一意性を示すことにも成功した．

研究成果の概要(英文)：We would study periodic minimal surfaces in the Euclidean space in terms of the differential geometry. In particular, we treated Morse indices of triply periodic minimal surfaces. In this period, we could succeed in computing many Morse indices for families of minimal surfaces which have been studied in physics and chemistry. Also, we could succeed in mathematical description of Lamellar structure by limits of triply periododic minimal surfaces. Moreover, we obtained the existence and uniqueness results for a complete minimal surface of finite total curvature in the Euclidean space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：幾何学

#### 1. 研究開始当初の背景

$n$ 次元 Euclid 空間内の  $n$  方向に周期的な極小曲面全体のモジュライ空間の研究は、Arezzo-Pirola による 1999 年の研究成果が顕著なもので、変形理論などの代数幾何学的アプローチが目立っていた。しかし、2000 年に入って江尻典雄氏による微分幾何学的なアプローチが現れ、しかしその後の大きな進展は見られなかった。氏の理論は極小曲面の Morse 指数を用いてモジュライ空間を記述するものである。なお、極小曲面の Morse 指数は 1968 年に Simons により精練された形となった研究対象であり、1990 年代に入ってから Montiel-Ros, 納谷, 江尻-小谷, Ross らによる研究が知られている。これらの先行研究によって、ごくごく特殊な具体例の Morse 指数は計算されたものの、その後の進展は見られなかった。

#### 2. 研究の目的

上述の背景を加味して、本研究期間においては  $n$  次元 Euclid 空間内の  $n$  方向に周期的な極小曲面全体のモジュライ空間を、微分幾何学的に記述することを目的とした。具体的には、極小曲面の面積最小性と関連する不変量である Morse 指数の観点からモジュライ空間を分類し、これまで様々な分野で考察されてきた極小曲面の変形族の振る舞いを解明することである。特に、3 次元 Euclid 空間内の三重周期的極小曲面は物理や化学における研究対象でもあり、多くの変形族が研究されてきた。それらの Morse 指数を計算することを主とするものである。

#### 3. 研究の方法

$n$  次元 Euclid 空間内の  $n$  重周期的極小曲面は、 $n$  次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面と対応する。また、曲面には必ず計量と適合した複素構造が導入でき、コンパクト Riemann 面と呼ばれる構造をもつ。コンパクト Riemann 面に対しては古来から非常に大きな理論が知られており、 $n$  次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面の方が理論的に扱いやすいので、後者を主に考察するのが有力視される。

極小曲面の Morse 指数の計算に関しては江尻氏による理論が有効と考えられ、そのためには極小曲面の第二種微分の周期を計算しなければならない。さらに高次の実対称行列の固有値を計算しなければならず、例えば種数 3 の場合だと、複雑な楕円積分を要素にもつような 18 次対称行列の固有値を計算する必要があり、手計算では限界がある。そこで Mathematica による数値計算を用いた研究手法が有力とされる。また、上述の通り、三重周期的極小曲面を研究する場合、これらが物理・化学・結晶学・高分子などの他分野の研究対象でもあるので、国内外を問わず異文化交流を通じた研究ディスカッションが非常に有力である。

#### 4. 研究成果

今回の研究期間では、江尻典雄氏との共同研究によって、物理や化学で研究されてきた様々な三重周期的極小曲面の変形族の Morse 指数を、数値計算を用いて計算することができた。具体的には、1990 年代に化学において、tP 族, tD 族, tCLP 族, rPD 族, H 族と呼ばれる三重周期的極小曲面が考察されていたのであるが、これらの Morse 指数を数値計算によってすべて計算することに成功した。その結果、これらは Morse 指数が 1, 2, 3 のいずれかであることが判った。三重周期的極小曲面の Morse 指数は 1 以上であることが知られていることから、1 という Morse 指数の最小値をとる変形族であることが解明できたことは大きい成果であると考えられる。

また、同氏との共同研究によって、余次元の高い場合の極小曲面の Morse 指数も計算することに成功した。具体的には、4 次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面で、超楕円型曲線の構造をもつようなものの具体例に対して Morse 指数を計算することができた。余次元が高い場合の極小曲面の Morse 指数を計算したという研究は、過去に類がない成果である。さらに、4 次元平坦トーラス内のコンパクトな楕円型曲線の構造をもつような極小曲面は種数が奇数のものしか知られていなかったのであるが、今回の研究成果において偶数種数の例が存在することを示すことができた。

次に、藤森祥一氏にも加わってもらい、三重周期的極小曲面の極限についても研究を進めることができた。これらはソフトマターの世界ではラメラ構造と呼ばれているものと関連しており、今後の重要な研究課題となるであろう対象である。具体的には、1990 年代に Meeks が構成した変形族がある。これは古来からよく知られている具体例を多く含んでいる変形族である。また、2007 年に Rodriguez によって構成された二重周期的極小曲面の変形族が知られている。今回、Rodriguez の変形族は Meeks による変形族の極限として実現されるということを示すことができた。

末尾に、本研究を進めていったときに偶発的に生じた藤森氏との共同研究の成果も付記する。3 次元 Euclid 空間内の全曲率有限かつ完備な極小曲面に関する仕事である。このような極小曲面には Jorge-Meeks の公式という全曲率に関する不等式が知られている。今回、エンドが 2 つの場合において、Jorge-Meeks の不等式のある種の等号が成り立つような極小曲面の存在を示すことができた。さらに我々の極小曲面のもつ対称性を考慮して、その一意性も示すことができた。

以上のことから、この 4 年間の研究期間は非常に充実したものとなったことを報告する次第である。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

- (1) S. Fujimori, T. Shoda, Minimal surfaces with two ends which have the least total absolute curvature, Pacific Journal of Mathematics 282 no 1 (2016), 107--144.
- (2) N. Ejiri, S. Fujimori, and T. Shoda, A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3, Topology and its Applications 196 (2015), 880--903.
- (3) N. Ejiri, T. Shoda, On a moduli theory of minimal surfaces, Prospects of Differential Geometry and its related fields (2014), Proceedings of the 3rd international colloquium on Differential Geometry and its related fields, 155--172, World Scientific.
- (4) S. Fujimori, T. Shoda, A family of complete minimal surfaces of finite total curvature with two ends, Differential Geometry of submanifolds and its related topics (2014), 19--31, Proceedings of the international workshop in honor of S. Maeda's 60th birthday, World Scientific.

[学会発表](計 17 件)

- (1) 「極小曲面の存在と一意性について」, Aspects of Differential Geometry, 東北大学理学部, 2016, 3, 9.
- (2) 「3次元 Euclid 空間内の全曲率有限な完備極小曲面の存在と一意性について」, 2016 名城大学幾何学研究集会「種々の幾何構造の深化」, 名城大学, 2016, 3, 1.
- (3) 「三重周期極小曲面の周期性の崩壊とラメラ構造について」, 部分多様体幾何とリー群作用 2015, 東京理科大学森戸記念館, 2015, 9, 7.
- (4) 「三重周期的極小曲面の第二変分作用素における 0 固有関数について」, 2015 名城大学幾何学研究集会「幾何構造の融合と発展」, 名城大学, 2015, 3, 9.
- (5) 「On zero eigenfunctions of Jacobi operator on a minimal surface」, 4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, Veliko Tarnovo University (Bulgaria), 2014, 9, 10.
- (6) 「The existence of non-holomorphic hyperelliptic minimal surfaces in flat 4-tori and their Morse indices」, The 5th International Workshop on Differential Geometry and Analysis, 虹ノ松原ホテル, 2014, 6, 1.
- (7) 「Periodic minimal surfaces in terms of

Morse indices」, Conference on Geometry, Galatasaray University (Turkey), 2014, 3, 20.

- (8) 「On families of periodic minimal surfaces」, Progress of geometric structures on manifolds, Meijo University, 2014, 3, 5.
- (9) 「Behavior of one-parameter families of minimal surfaces in flat tori in terms of Morse index」, The second Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, Tokyo Institute of Technology, 2014, 2, 5.
- (10) 「3重周期極小曲面の退化について」, 研究集会「多様体上の微分方程式」, 金沢大学サテライトプラザ, 2013, 11, 21.
- (11) 「三重周期極小曲面の退化極限について」, 福岡大学幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2013, 11, 1.
- (12) 「A remark of limits of triply periodic minimal surfaces」, International Conference on Topology and Geometry 2013, Shimane University, 2013, 9, 3.
- (13) 「Morse indices of minimal surfaces in flat tori」, Oberwolfach workshop「Progress in Surface Theory」, Oberwolfach, 2013, 5, 3.
- (14) 「4次元平坦トーラス内の偶数種数の超楕円型極小曲面について」, 名城大学研究集会「多様体と幾何構造の融合」, 名城大学, 2013, 3, 4.
- (15) 「3重周期極小曲面の周期計算について」, 福岡大学幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2012, 11, 1.
- (16) 「極小曲面の Morse index について」, 日本数学会 2012年度秋季総合分科会 幾何学分科会 特別講演, 九州大学, 2012, 9, 18.
- (17) 「On classical triply periodic minimal surfaces」, The eighth Chinese-Japan Friendship Conference on Differential Geometry, Chengdu, 2012, 9, 11.

[図書](計 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/~tshoda/s>

[hoda-home-j.html](http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/~tshoda/s)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

庄田 敏宏 (Shoda Toshihiro)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号：10432957

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：