

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：12101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740049

研究課題名(和文) 等質ラグランジュ部分多様体の対の交叉とFloerホモロジーの研究

研究課題名(英文) Research on the intersection of a pair of homogeneous Lagrangian submanifolds and Floer homology

研究代表者

入江 博 (IRIYEH, HIROSHI)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号：30385489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、シンプレクティック多様体の中の高い対称性をもつラグランジュ部分多様体のシンプレクティックトポロジーに関する性質の解明である。この種のラグランジュ部分多様体の具体的研究は少なかったが、空間の対称性を利用することにより、複素射影空間の場合を中心に、ラグランジュ部分多様体のホモロジー的剛性、ラグランジアンFloerコホモロジーの計算例、及びハミルトン体積最小性問題への応用が得られた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to reveal the symplectic topological nature of a Lagrangian submanifold with a high degree of symmetry in a symplectic manifold. There were few concrete studies concerned with this kind of Lagrangian submanifold. By using the symmetries of these spaces, in particular in the complex projective space, we obtained the results about homological rigidity of Lagrangian submanifolds, explicit calculations of Lagrangian Floer cohomology, including an application to the Hamiltonian volume minimizing problem.

研究分野：数物系科学

キーワード：Floerコホモロジー ラグランジュ部分多様体 複素旗多様体 実形 対蹠集合 ハミルトン体積最小性

1. 研究開始当初の背景

Arnold-Givental 不等式は、シンプレクティック多様体  $M$  の反シンプレクティックな対合による固定点集合として得られるラグランジュ部分多様体  $L$  について、 $L$  とハミルトン微分同相写像による像  $(L)$  が横断的に交わるとき、交点  $L \cap (L)$  の個数を  $L$  の  $Z_2$  係数のベッチ数の和で下から評価する不等式であり、大域シンプレクティック幾何における基本的な結果の一つである。

Floer は、1980 年代半ばに Floer ホモロジーの概念を導入することにより、この不等式を 2 次の相対ホモトピーが消える  $L$  の場合に証明し (Morse theory for Lagrangian intersections, J. Diff. Geom., 18 (1988), 513-547)、最初の突破口を開いた。さらに、1990 年代初頭、Y.-G. Oh は、Floer ホモロジーの理論をラグランジュ部分多様体  $L$  が単調の場合にまで拡張し (Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 949-993)、Arnold-Givental 不等式を既約コンパクト型エルミート対称空間の実形の場合に証明した (Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture, The Floer Memorial volume, Progr. Math., 133 (1995), 555-573)。現在では、深谷賢治、Oh、太田啓史、小野薫の四氏により、この不等式はかなり一般的な設定で証明されている (Lagrangian Intersection Floer Theory - Anomaly and Obstruction, part 1,2(2009))。

その一方で、シンプレクティック多様体  $M$  のハミルトンイソトピックではない 2 種類のラグランジュ部分多様体  $L_1$  と  $L_2$  に対する同様の交点数評価の研究はまだ少なく、今後のラグランジュ交叉の研究において一つの有望な研究領域と考えられる。当初、具体的な研究としては、次の 2 つのクラスでの結果があった。

(1) コンパクト型エルミート対称空間の合同とは限らない 2 つの単調な実形  $L_1$  と  $L_2$  の場合 (H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 65(2013), 1135-1151) これは上記の Oh の結果の一般化である。

(2) G. Alston による複素射影空間の中の実射影空間(=  $L_1$ ) とクリフォードトーラス(=  $L_2$ ) の場合、及び Alston-Amorim によるトーリックファノ多様体の実部(=  $L_1$ ) とトーラスファイバー(=  $L_2$ ) への一般化 (Floer cohomology of torus fibers and real Lagrangians in Fano toric manifolds, Int. Math. Res. Not. 12(2012), 2751-2793)

特に、前者の場合には交点数の最良評価が得られ、 $M$  が複素 2 次超曲面のとき、その中の奇数次元ラグランジュ球面がハミルトン体積最小性であるという応用が得られた。

2. 研究の目的

この状況下、本研究では以下の 3 つの設定で対称性の高いシンプレクティック多様体  $M$  の、ハミルトンイソトピックとは限らない 2 種類の等質なラグランジュ部分多様体  $L_1$  と  $L_2$  に対する  $M$  のハミルトン微分同相写像による変形の下での交点数

$$\#(L_1 \cap (L_2))$$

の最良評価を主目的とした。

(1) 接触変換の場合への拡張

コンパクト型エルミート対称空間  $M$  の 2 種類の実形  $L_1$  と  $L_2$  について、 $L_2$  を  $M$  の前量子化束  $\pi: P \rightarrow M$  にリフトさせたルジャンドル部分多様体  $L_2'$  を  $P$  の接触変換で移して  $M$  に射影した  $(L_2')$  と  $L_1$  の交点数の最良評価を行う。ここで、 $P$  は  $M$  上の  $S^1$  束で与えられる接触多様体である。 $P$  の接触イソトピーによる変形は  $M$  のハミルトンイソトピーによる変形よりも広いため、先行研究(1.(1))の拡張となる。

(2) 複素旗多様体の中の 2 種類の実旗多様体の場合

先行研究(1.(1))で扱ったコンパクト型エルミート対称空間を含む自然なクラスである複素旗多様体  $M$  の中の 2 種類の実旗多様体  $L_1$  と  $L_2$  について、交点数  $\#(L_1 \cap (L_2))$  の最良評価を行う。ここで、 $\#(L_1 \cap (L_2))$  は  $M$  のハミルトン微分同相写像である。

(3) 複素射影空間の中の対称なラグランジュ部分多様体の場合

複素射影空間の中の 2 種類の対称なラグランジュ部分多様体  $L_1$ 、 $L_2$  について、Floer ホモロジー  $HF(L_1, L_2)$  の計算を行う。この種のラグランジュ部分多様体は性質のよい等質な極小部分多様体であり、分類されている。既約なもの、実射影空間、射影ユニタリ群、他 3 種類ある。また、クリフォードトーラスも既約ではないがこの性質をもち、このクラスは先行研究(1.(2))の拡張である。

3. 研究の方法

(1) 接触変換の場合への拡張

研究手法は、Eliashberg-Hofer-Salamon による接触多様体に関する Floer ホモロジー理論 (Lagrangian Intersections in Contact Geometry, Geom. Funct. Anal., 5 (1995), 244-269) を用いる。最大の困難は、 $P$  のシンプレクティック化が非コンパクト非凸なシンプレクティック多様体であることによる、正則 strip のモジュライ空間のコンパクト性の欠如である。

代表者のアイデアは、先行研究(1.(1))で用いた対称性の議論を Eliashberg-Hofer-Salamon の解析と融合させることであった。

### (2) 複素旗多様体の中の2種類の実旗多様体の場合

研究手法は、Y.-G.Oh による単調なラグランジュ部分多様体の Floer ホモロジー理論 (Comm.Pure Appl.Math.,46(1993),949-993) を用いる。M の計量としてケーラーアインシュタイン計量を使えば、 $L_1$  及び  $L_2$  は単調となる。最小マスロフ数が 3 以上であれば、Oh の理論により  $Z_2$  係数の Floer ホモロジー  $HF(L_1, L_2)$  は定義できる。したがって、Floer 複体の境界作用素が 0-map になるような M の正則な strip のモジュライ空間の対称性を発見することが課題となる。

複素旗多様体 M には、コンパクト型エルミート対称空間の場合の点対称(正則な対合的変換)がない。この部分に困難がある。そこで、随伴軌道への埋め込みを通していくつかの具体例について、交叉  $L_1 \cap L_2$  の配置を決定することから研究を開始させる。次に、一般の場合も含めて随伴軌道への埋め込みを利用して交叉  $L_1 \cap L_2$  の配置を記述し、それを用いて正則 strip のモジュライ空間の対称性を探す。

具体的な Floer ホモロジーの計算は標準的な複素構造を用いて行う。コンパクト型エルミート対称空間 M の場合には、Oh による曲率を利用した微分幾何的方法 (Fredholm-regularity of Floer's holomorphic trajectories on Kähler manifolds, Kyungpook Math.,J.,37(1997), 153-164)があり、先行研究ではこれをそのまま利用できた。しかし、一般の複素旗多様体の場合には曲率条件が満たされないため、この部分の議論の改良が必要で、二つ目の本質的な課題である。

### (3) 複素射影空間の中の対称なラグランジュ部分多様体の場合

研究手法は、(2)と同様に Oh による Floer ホモロジー理論を用いる。Alston は、クリフォードトラスに境界をもつ正則円盤の分類結果 (C.-H.Cho, Int. Math. Res. Not., 35(2004),1803-1843)を利用して、実射影空間との対の Floer ホモロジーを奇数次元の場合に計算した。この方法は本課題の場合にも適用可能と考えられ、正則円盤の分類結果を利用できる場合から始めて、段階的に研究を進行させる。

## 4. 研究成果

### (1) 接触変換の場合への拡張

この研究については、解析的部分の困難から 3.(1)のアイデアを実行するまでに至らなかった。現時点では成果は得られておらず、今後の課題として残った。

### (2) 複素旗多様体の中の2種類の実旗多様体の場合

まず、Riemann 対称空間の対蹠集合の概念を複素旗多様体の場合に拡張してその基本的性質を導出し、具体例として次の予備的研究を行った。

複素ベクトル空間の部分空間の系列として得られる複素旗多様体の場合に、実部として定まる二つの合同な実旗多様体の交叉の具体的表示を与え、その交叉が離散的な場合には一般化された対蹠集合になることを示した(論文)。

複素ベクトル空間の偶数次元の部分空間の系列として得られる複素旗多様体の場合に、四元数部分空間の系列で定義される二つの合同な実旗多様体の交叉を明示的に与えた。特に、交叉が離散的な場合には一般化された対蹠集合になることがわかった(論文)。

以上の結果は、代表者、酒井高司氏(首都大学東京)、田崎博之氏(筑波大学)との共同研究により得られた。これらの予備的研究を経て、井川治氏(京都工芸繊維大学)により導入された対称三対の概念を利用することにより、一般の複素旗多様体 M の合同とは限らない2種類の実形  $L_1$  と  $L_2$  の離散的交叉が一般化された対蹠集合になり、ある種のワイル群の軌道となることを示した(学会発表)。さらに、これを用いて二つの実形がハミルトンイソトピックな場合には、標準的複素構造の regularity を仮定すれば Floer ホモロジーがその交叉で生成されることを証明した。これらは上記3名に井川治氏(京都工芸繊維大学)、奥田隆幸氏(広島大学)を加えた5名の共同研究により得られた。

後は、標準的複素構造の regularity の証明と二つの実形がハミルトンイソトピックではない場合の Floer ホモロジーの計算が残っているが、最終的な解決に近づいている。

### (3) 複素射影空間の中の対称なラグランジュ部分多様体の場合

2013年3月チューリヒ工科大学(ETH)滞在中、Paul Biran 氏との議論が契機となり、複素射影空間の対称なラグランジュ部分多様体のシンプレクティックポロジーを調べる際、Oh が導入し、Biran により整備された Floer コホモロジーに収束するスペクトル系列が大変有用な道具になることが認識できた。さらに、Biran、Cornea 両氏による Floer コホモロジーの一般論を援用することにより、以下の結果を得た。

整係数1次ホモロジー群が3-torsionである5次元と8次元のラグランジュ部分多様体のホモロジー的剛性

複素射影空間のあるクラスのラグランジュ部分多様体の  $Z_2$  係数 Floer コホモロジーの消滅定理

射影ユニタリ群として埋め込まれたラグランジュ部分多様体の  $Z_2$  係数 Floer コホ

## モロゾーの計算

以上の結果は本研究の主要部分であり、論文にまとめた。ここで行った計算法の易しい応用として、球面の等径超曲面のガウス像として得られる複素2次超曲面のラグランジュ部分多様体は、ハミルトンイソトピーの下で交叉が外せないことを示した(学会発表)

(4) 複素射影空間のラグランジュトーラス軌道のハミルトン非体積最小性

このテーマは当初は計画していなかったが、小野肇氏(埼玉大学)との共同研究により以下のことがわかった。

複素射影空間の標準的なトーラス作用に関するラグランジュトーラス軌道は、ハミルトン極小かつハミルトン安定であることが知られている。2015年に発表されたChekanovとSchlenkによる複素ユークリッド空間の標準的ラグランジュトーラスのハミルトンイソトピー類の分類定理を用いて、上記のラグランジュトーラス軌道のほとんどが、3次元以上ではハミルトン体積最小ではないことが証明できた(論文)。これは、ハミルトン体積最小性問題において、ラグランジュ部分多様体の族の全体像としてこの種の性質が把握できた最初の結果であるため、今後の研究の指針を与える成果であると考えている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai, Hiroyuki Tasaki, On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 巻: 未定, 12 pages, 査読有

Hiroshi Iriyeh, Hajime Ono, Almost all Lagrangian torus orbits in  $CP^n$  are not Hamiltonian volume minimizing, *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol 49, 12 pages, 2016, 査読有

DOI:10.1007/s10455-016-9504-6

Hiroshi Iriyeh, Symplectic topology of Lagrangian submanifolds in  $CP^n$  with intermediate minimal Maslov numbers, to appear in *Advances in Geometry*, 2016, 査読有

Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai, Hiroyuki Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol 106, 391-399, 2014, 査読有

DOI:10.1007/978-4-431-55215-4\_35

入江 博、酒井 高司、田崎 博之、『複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構

造』、RIMS Kokyuroku, 1880 巻、100-116、2014、査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1880.html>

[学会発表](計 8 件)

入江 博、Hui Ma、宮岡 礼子、大仁田 義裕、『等径超曲面の Gauss 像の Hamiltonian non-displaceability』、日本数学会 2016 年度年会、2016.3.16、筑波大学(茨城県・つくば市)

井川 治、入江 博、奥田 隆幸、酒井 高司、田崎 博之、『複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉』、日本数学会 2015 年度年会、2015.3.22、明治大学(東京都・千代田区)

入江 博、小野 肇、『非 Hamilton 体積最小な Hamilton 安定 Lagrange トーラスについて』、日本数学会 2014 年度秋季総合分科会、2014.9.25、広島大学(広島県・東広島市)

入江 博、酒井 高司、田崎 博之、『複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造』、日本数学会 2014 年度秋季総合分科会、2014.9.25、広島大学(広島県・東広島市)

Hiroshi Iriyeh, Symplectic Topology of Lagrangian Submanifolds, NCTS Symplectic Geometry Seminar, 2014.3.10, 台南(台湾)

入江 博、『複素射影空間の中間的な最小 Maslov 数をもつ Lagrange 部分多様体のホモロジー的剛性』、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会、2013.9.26、愛媛大学(愛媛県・松山市)

Hiroshi Iriyeh, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces and its application, ETH Symplectic Geometry Seminar, 2013.3.18, ZURICH(スイス)

入江 博、酒井 高司、田崎 博之、『複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造』、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会、2012.9.18、九州大学(福岡県・福岡市)

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

入江 博 (IRIYEH HIROSHI)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号: 30385489

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し

(4) 研究協力者

無し