3版

様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１１６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００５０
研究課題名（和文）非リーマン型接続の幾何へのツイスター的アプローチ

研究課題名（英文）Twistor theoretic approach for the geometry of non-Riemannian type connection

研究代表者
中田　文憲（NAKATA, Fuminori）

福島大学・人間発達文化学類・准教授

研究者番号：８０４６７０３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：回転対称な不定値アインシュタイン-ワイル構造に関するツイスター対応を構成し、積分変換や波動方程式の理論との関連を発見した。また、ねじれたトッド-鎌田計量に関するツイスター対応の構成についても研究を進めている。
一方、他の専門家との共同によりG2幾何学に関する研究を開始し、めざましい成果が得られた。具体的にはG2幾何学におけるツイスター理論により、結合的グラスマン多様体の構造を特徴づけることに成功した。この理論は等径超曲面の理論と密接にかかわることが判明している。また、結合的グラスマン多様体の構造を調べる上で重要な写像を、ムービングフレームの手法により明快に記述することに成功した。

研究成果の概要（英文）：The twistor correspondence for circle invariant indefinite Einstein-Weyl structure is established, and its relation with the theory of integral transforms and wave equations are found. Investigation for the twistor correspondence for the twisted Tod-Kamada metric is also progressing.
On the other hand, by the collaboration with several specialists, we start an investigation for G2 geometry, and obtained a remarkable result. That is, we succeeded to characterize a geometric structure of the associative Grassmannian via twistor theory in the G2 geometry. This theory is strongly related to the theory of isoparametric hypersurfaces. Moreover, we succeeded to write down a map clearly which is important in the investigation of the associative Grassmannian.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ツイスター理論　不定値計量　複素幾何学　波動方程式

１．研究開始当初の背景

(1) Penrose によって創始されたツイスター理論は, Atiyah らの研究によってリーマン幾何へ展開し，その後ゲージ理論の大きな発展へと繋がった．Penrose やAtiyah らの理論は４次元の自己双対共形構造に関するものだが，その後Hitchin によってEinstein-Weyl 構造や射影構造の場合に，Bryant によってexotic ホロノミーの場合に，それぞれアナロジーが展開されている．また，ツイスター空間の構成は四元数Kahler 多様体の場合も可能であることが知られている.

(2) 近年，LeBrun とMason の研究により，正則円板の族を用いたツイスター理論が開発された．この理論は幾つかの幾何構造に関して確立されているが，注目すべきは，これらがすべて非リーマン型接続の幾何学であるという点である．このLeBrun-Mason 型の理論は現在知られているもの以外の様々な幾何構造に関しても展開できると期待される.

(3) ホロノミー群が定める幾何学は微分幾何学において重要であるが，非リーマン型（不定値から定まる接続・計量から定まらない接続）に関する幾何学の研究は現在のところ非常に少ない．その中でもBryantは，exoticホロノミーと呼ばれるもののひとつがPenrose型ツイスター対応によって現れることを指摘している．また不定値四元数Kahler 構造や，不定値G2 群やSpin(3,4) といった特殊型のホロノミーについても，ツイスター理論の展開が期待される.

(4) 応募者の本研究開始以前に以下の成果を得ていた:

(i) LeBrun-Mason 型のツイスター対応は三種類が知られているが，これらに関する簡約理論を開発し，その詳細を研究した.

(ii) 簡約理論の手法を用い，LeBrun-Mason 対応の具体例を構成した．このとき，応用として双曲型偏微分作用素と積分変換に関する新しい結果が得られた.

(iii) Einstein-Weyl 構造に関するLeBrun -Mason 対応の研究をおこない，大域的条件に関する内容など，いくつかの部分において貢献した.

２．研究の目的

非リーマン型接続（擬リーマン計量から定まる接続，および計量に由来しないアファイン接続）の幾何学に対して，ツイスター理論によるアプローチを中心とした研究を展開する．具体的な内容は以下の通り.

(1) 群作用つきのLeBrun-Mason 型ツイスター対応の研究を発展させると同時に，具体例の構成を通して偏微分方程式の理論との関連を研究する．具体的には次が挙げられる:

・S1 不変不定値Einstein-Weyl 構造に関するツイスター対応の構築・具体例の構成

・トーラス不変不定値自己双対共形構造に関するツイスター対応の構築・具体例の構成

(2) ツイスター理論や積分変換の手法によって，以下に挙げた構造に関する研究手法を開発する:

・不定値四元数Kahler 構造

・不定値特殊ホロノミー
(不定値G2 やSpin(3, 4))

・(非解析的) exotic ホロノミー

・その他の非リーマン型接続

(3) ベクトル束の幾何学に関するツイスター対応も構成できると期待される．状況に応じてその研究をおこなう.

３．研究の方法

短期目標として，群作用つきのツイスター対応と偏微分方程式の理論との関連について，一般論の展開と具体例の構成をめざす．その後の最終目標として、不定値の四元数ケーラー幾何や不定値の特殊ホロノミーの幾何学などに関するツイスター型理論の定式化を目指す.

また，上記の目標の実現が困難である場合などには，予備課題としてベクトル束の幾何におけるツイスター理論についての研究をおこなう．

４．研究成果

(1) 本研究の初期段階ではまずこれまでの研究の継続として，以下の３つのテーマについて研究を行った:

(i) 回転対称な不定値Einstein-Weyl構造に関するツイスター対応の確立

(ii) ねじれたTod-Kamada計量に関するツイスター対応の構成

(iii) 不定値型四元数を用いたLeBrun-Mason対応のアナロジーの展開

(i) についてはある範囲でのツイスター対応が構成でき，またこの構成は，積分変換や波動方程式に関して古くから知られた結果と関連していることがわかった．本研究結果については国際研究集会 ICDG2014 をはじめ，国内の複数の研究集会で発表し，ICDG2014 のプロシーディングスとして論文にまとめた．なお，このツイスター対応においては正則円板の複雑な退化が起きる現象が見つかっており，この状況について詳しく調べることまでは到達しておらず，今後の研究課題として残されている．

(ii) については，これまでの研究で得られた手法を用いることが可能であることがわかってきているが，その実行のためには標準的モデルの構築と詳細な分析が必要であり、研究はまだ半ばである．現在も鎌田博行氏との打ち合わせ等を継続し，その可能性について探っている．

(iii) については「非リーマン型接続の幾何に関するツイスター理論」につながる新しい道を拓くことになると期待されたが，研究を進めた結果，残念ながらこれまでに知られているものが現れ，新たな理論へとつながらないことが判明した．

以上は不定値計量に関する研究であるが，この分野の専門家である松下泰雄氏，鎌田博行氏との研究打合せをおこない，これまでの成果の整理を進めた．この整理を踏まえ，松下泰雄氏，鎌田博行氏との共著により「4 次元微分幾何学への招待」(サイエンス社 SGC ライブラリー)を平成 25 年 12 月に出版した．中田は第 10 章および第 11 章を担当し，複素・正定値・不定値の各ツイスター理論を統一的に，微分幾何学の現代的な手法により論じた．

(2) 新たな研究の展開として，平成 25 年度から G2 幾何学，および Spin(7)幾何学に関する基本的事項のサーベイを進め，これらに対するツイスター的アプローチや，不定値版の理論の可能性を探る研究を開始した．
まずは G2，Spin(7)幾何の専門家である橋本英哉氏，大橋美佐氏との交流を深め，共同研究を開始した．平成 27 年度にはさらに Lie 群・Lie 環論の専門家である間下克哉氏にも共同研究に加わっていただき，研究を進めている．

具体的な成果として，まず G2 幾何学におけるツイスター理論により，結合的グラスマン多様体の構造を特徴づけることに成功した．この理論は等径超曲面の理論と密接に関わることが判明したが，このことは大きな成果といえる．この理論の主役である結合的グラスマン多様体は特殊なホロノミーを持つリーマン多様体であり，本研究で扱っているツイスター対応はこのホロノミーと密接に関係している．厳密に言えば，研究目的として想定していた「非リーマン型接続」に関するツイスター対応ではないものの，ツイスター理論におけるこれまでにない方向性の研究と言え，また， 不定値の特殊ホロノミーや exotic ホロノミーの理論へとも直結する，

その第一歩の研究成果であると言える．

本共同研究ではさらに，ツイスター対応を記述する際にこれまではっきりしなかった写像を，ムービングフレームの手法により明確かつシンプルに記述することに成功した．このことにより，ツイスター対応のさらに深い性質について，今後研究を進めることが可能になると期待される．以上について，現在論文を執筆中である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

① Fuminori NAKATA, Circle invariant indefinite Einstein-Weyl structures and the twistor correspondence, Current Developments in Differential Geometry and related Fields, 査読有, 2016, 45-56.

② Fuminori NAKATA, Wave equations, Integral transforms, and twistor theory on indefinite geometry, Prospects of Differential Geometry and Its Related fields, 査読有, 2014, 83-97.

③ Fuminori NAKATA, An integral transform on a cylinder and the twistor correspondence, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 30, 2012, 428-437.

〔学会発表〕（計１４件）

① 中田文憲，結合的グラスマン多様体に関するツイスター対応について，名城幾何学研究集会，2016 年 3 月，名城大学（愛知県・名古屋市）

② 中田文憲，対称空間 G2/SO(4) のイソトロピー表現について，淡路島幾何学研究集会，2016 年 1 月，国民宿舎慶野松原荘（兵庫県・南あわじ市）

③ 中田文憲、自己双対計量とツイスター対応 I・II，幾何学阿蘇研究集会，2015 年 9 月，休暇村南阿蘇（熊本県・高森町）

④ 中田文憲，不定値のツイスター対応と積分変換，関大微分幾何研究集会，2015 年６月，関西大学（大阪府・吹田市）

⑤ 中田文憲，Twistor correspondence for associative Grassmannian, G2 幾何小研究集会，2015 年 5 月，鶴城コミュニティセンター（福島県・会津若松市）

⑥ 中田文憲，正則円板の族による Einstein-Weyl 構造の構成について，名城幾何学研究集会，2015 年 3 月，名城大学（愛知県・名古屋市）

⑦ 中田文憲、複素・正定値・ニュートラルのツイスター対応，GAP Project Spring School, 2015 年 3 月，立命館大学（滋賀県・草津市）

⑧ 中田文憲，正則円板の族による Einstein-Weyl 構造の構成について，淡路島幾何学研究集会，2015 年 1 月，国民宿舎慶野松原荘（兵庫県・南あわじ市）

⑨ Fuminori NAKATA, Circle invariant indefinite Einstein-Weyl structures and the twistor correspondence, 3rd International Conference of Differential Geometry and related fields, 2014 年 9 月,Veliko Tarnovo (Burgaria)

⑩ 中田文憲，Twistor correspondence for non-compact indefinite self-dual manifolds, 名城幾何学研究集会，2014 年 3 月，名城大学（愛知県・名古屋市）

⑪ 中田文憲，不定値のツイスター対応について，日本数学会東北支部会，2014 年 2 月，宮城教育大（宮城県・仙台市）

⑫ 中田文憲，八元数とツイスター対応，淡路島幾何学研究集会，2014 年 1 月，国民宿舎慶野松原荘（兵庫県・南あわじ市）

⑬ 中田文憲，Twistor correspondence for R-invariant indefinite self-dual metric on R^4, 多変数複素解析冬セミナー，2013 年 12 月，コラッセ福島（福島県・福島市）

⑭ 中田文憲，自己双対性とツイスター対応 1・2，RIMS 共同研究：凝集現象を内包する非線形偏微分方程式に対する幾何学的視点と解析学的視点の共同，2013 年 10 月，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

〔図書〕（計１件）

① 松下泰雄・鎌田博行・中田文憲，サイエンス社(SGC ライブラリ 113)，4 次元微分幾何学への招待，2014 年，129 頁-172 頁

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

特記事項なし

６．研究組織

(1)研究代表者

中田　文憲（NAKATA, Fuminori）
福島大学・人間発達文化学類・准教授
研究者番号：８０４６７０３４

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし

(4)研究協力者

鎌田　博行（KAMADA, Hiroyuki）
宮城教育大学・教育学部・教授
研究者番号：００２４９７９９

橋本　英哉（HASHIMOTO, Hideya）
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：６０２１８４１９

大橋　美佐（OHASHI, Misa）
名古屋工業大学・工学部・准教授
研究者番号：７０７１０３５９

松下　泰雄（MATSUSHITA, Yasuo）
滋賀県立大学・名誉教授
大阪市立大学・数学研究所・
　専任数学研究所員