

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740051

研究課題名(和文) ジョンソン準同型を焦点とする自由群の自己同型群及び、写像類群の代数的研究

研究課題名(英文) The focused study of automorphism groups of free groups and the mapping class groups for the Johnson homomorphisms

研究代表者

佐藤 隆夫 (Sato, Takao)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：70533256

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で、自由群の自己同型群のAndreadakis-Johnsonフィルトレーション、及びJohnson準同型に関する新しい性質をいくつか明らかにすることができた。特に、上三角自己同型群に対するAndreadakis予想の解決や、自由群のFricke指標環や、 $SL(m, \mathbb{C})$ 表現から定める環を用いて、Johnson-森田理論の類似物を構築することができ、その基礎部分を概ね整備することができた。さらに、写像類群との関連に関する今後の研究へ繋がる道筋をつけることができた。

研究成果の概要(英文)：We obtained many new results for the Andreadakis-Johnson filtration and the Johnson homomorphisms of the automorphism groups of free groups. In particular, we gave the affirmative answer to the Andreadakis conjecture for the upper triangular automorphism groups, and established an analogue of the Johnson-Morita theory by using the rings of Fricke characters of free groups and the rings of $SL(m, \mathbb{C})$ -representations of free groups. We expect that these results have good applications for the study of the mapping class groups of surfaces.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：自由群の自己同型群 Johnson準同型 群のコホモロジー 写像類群

1. 研究開始当初の背景

自由群の自己同型群は、曲面の写像類群と並び古くから多くの研究者によって様々な手法を用いて精力的研究されてきた群である。特に、Vogtmann, Hatcher, Galatius による有理自明係数安定ホモロジー群の計算や、森田茂之、河澄響矢らによる Johnson 準同型を用いた研究が盛んに行われていた。

自由群のアーベル化に自明に作用するような自己同型たちのなす正規部分群を IA-自己同型群という。IA-自己同型群は曲面の写像類群における Torelli 群に対応する群であり、自由群の自己同型群の群論的構造の豊かさや複雑さを数多く反映する。1935 年に Magnus によって、IA-自己同型群が有限生成であることが示され、Cohen-Pakianathan, Farb, 及び河澄響矢の独立した仕事によりアーベル化の構造が決定されていた。しかしながら、自由群の階数が 4 以上の場合は有限表示可能かどうかさえも決定されておらず、2 次元以上の整係数コホモロジーについては、具体的な構造が何一つ分かっていなかった。IA-自己同型群は組み合わせ群論的にもホモロジー代数的にも非常に扱いが難しい群である。

私は、IA-自己同型群の構造を直接調べるのではなく、ある降下フィルトレーションを用いて逐次次数商を調べるといって、Johnson 準同型という道具を用いた研究を行ってきた。自由群の各冪零商に自明に作用する自己同型たちのなす部分群たちは、自由群の自己同型群にある中心的降下フィルトレーションを定める。これを Andreadakis-Johnson フィルトレーションという。この次数商の構造を記述するものとして Johnson 準同型が定義される。以前のの研究で、Johnson 準同型を IA-自己同型群の降中心列に制限した場合の安定的有理余核を決定していたが、完全な余核を決定することは甚だ難しい。そこで、Andreadakis-Johnson フィルトレーションが、IA-自己同型群の降中心列に一致するのではないかという、Andreadakis 予想の解決は、我々の一連の研究をより盤石なものにするために是非取り組むべき課題であった。

一方で、IA-自己同型群の整係数ホモロジー群は自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジー群と表裏一体の関係にある。それまで自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーは体系的に研究されたことがなかったので、IA-自己同型群の整係数ホモロジー群の構造や、非自明な高次元コサイクルの構成に関する研究は、大きなインパクトを生み出すものと考えていた。

2. 研究の目的

本研究開始時の主な目的のうちの 하나가、上述した Andreadakis 予想の解決である。Johnson 準同型のそれまでの研究の完成度

を高めるという意味でも、この目的に掲げることは至極妥当なところである。一方で、これを完全に決定することは相当な組み合わせ論的複雑さ、困難さが見込まれる。そこで、Andreadakis-Johnson フィルトレーションと、IA-自己同型群の降中心列が、有限指数だけズレを許して一致するかという、有理 Andreadakis 予想の解決を試みることも目的とした。このような問題の「簡易化」を行う大きな意義は、GL 表現論が使える点にある。

一方、もう一つの主な目的は IA-自己同型群の整係数ホモロジー群の解明であり、特に具体的な目標は、まずその 2 次元コホモロジー群を決定することである。Pettet によって 1 次元コホモロジーのカップ積の像については完全に決定されているが、それが全体を生成しているかどうかは重要な未解決問題であると考えていたためである。

3. 研究の方法

我々の研究手法の特徴はとり分け代数的であり、特に組み合わせ群論とホモロジー代数を用いた、具体的かつ膨大な計算による職人芸的な要素が強い。

上記の研究目標で述べた、「有理係数版の Andreadakis 予想」を解決するには、IA-自己同型群の降中心列に制限した有理 Johnson 準同型が単射であることを示せばよい。言いかえると、IA-自己同型群の降中心列の各次数商が、有理 Johnson 準同型写像の像と有理数体上のベクトル空間として同型であることを示せばよい。そのためには、IA-自己同型群の Magnus 生成系による重み交換子たちの間のたくさん関係式を見つけ、それによって各次数商の生成元を有理 Johnson 像の次元まで減らせることを示せばよい。そこで、まずは自由群の階数が低い場合に、組み合わせ群論の具体的な計算を行い、様子を確かめ、そこで得られた結果を高い次数の場合に拡張できないか考察する。

また、2 次元コホモロジーの計算に関しては、それまでに行っていた自由メタアーベル群の自己同型群に対する結果の類似物が構成できないかを考察する。自由メタアーベル群の IA-自己同型群の、Magnus 生成系の間関係式のある性質に注目することで、1 次元コホモロジーのカップ積の、2 次元コホモロジーにおける像を組み合わせ群論的に記述することができる。これと同様のことを自由群の自己同型群の場合に構築できないか取り組む。

4. 研究成果

以下、本研究で得られた主な結果をまとめる。

(1) 自由群の Fricke 指標環に対する Johnson-森田理論の構築

本研究に着手し種々の計算を実行したが、IA 自己同型群の Magnus 生成系たちの交換子間の関係が非常に複雑であり、なかなか研究が進まなかった。そこで、交換子に頼らないような、別種の観点から自由群の自己同型群の作用の様子を記述し、それらと交換子群間の関係を改めて記述できないかということを考えるようになった。結果として、自由群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の指標たちを使うと、Johnson 準同型の理論と同様のことが成り立つことが分かった。具体的には、自由群の Fricke 指標環の、あるイデアル降下列を考え、これらへの自由群の自己同型群の作用を考えることにより、自由群の自己同型群に新しい中心的降下フィルトレーションが定まる。このフィルトレーションの k 次の部分群は、Andreadakis-Johnson フィルトレーションの $2k$ 次の部分群を含んでいることが分かり、Johnson 準同型の Fricke 指標版が構築できることが分かった。(以上まで、東京農工大の畠中英里氏との共同研究) さらに、森田茂之氏による、写像類群の第 1 Johnson 準同型の写像類群への拡張を参考に、Fricke 指標版の第 1 Johnson 準同型が自由群の自己同型群上に、crossed homomorphism として拡張するという結果も得られた。これは、本質的に新しいサイクルであり、専門家に対するインパクトなどを考慮すると今後の研究の進展に期待している。

(2) 自由群の "上三角" IA-自己同型群に対する Andreadakis 予想の解決

Andreadakis 予想を解決するために、多くの計算を実行したが、その中で、ある特定の関係式だけに注目すれば、そのような関係式のみを持つ部分群に対しては Andreadakis 予想が肯定的に解決できることが分かった。具体的には、自由群の自己同型群から一般線型群への標準的写像の像が上三角行列となるような、Nielsen 自己同型たちで生成される、自由群の自己同型群の部分群を考える。これに対して、研究手法で述べた議論を適用すると予想通りの流れで結論が証明できた。さらに、"上三角" 自己同型群と IA-自己同型群の共通部分である、"上三角" IA-自己同型群に関して、その無限表示を得ることができた。

自由群の自己同型群と、"上三角" 自己同型群とではかなりの差があり、上記の結果から直ちにももとの Andreadakis 予想が解決できるわけではない。しかしながら、Magnus が有理整数環上の一般線型群の表示を求めるときに考えた、一般線型群の標準形を見ても分かるように、"上三角" 自己同型群は、自

由群の自己同型群のある種の標準形を構築する上で重要な役割を果たすものと考えており、その意味で、今回の結果は今後の研究の足掛かりとして有意義なものであると考えている。

(3) McCool 群の Johnson 準同型の像の特徴づけ

一般に、IA 自己同型群の Magnus 生成系は 2 種類あり、そのうち、McCool 群を生成するものに限定すれば、関係式は極端に簡明になる。そこで、このような群に対して Andreadakis 予想が解決できるかを試みた。そのためには、Johnson 準同型の像が決定されていなければならないので、まず、McCool 群の Johnson 像についての研究を行い、いくつかの結果が得られた。特に、ある種の Trace 写像を構成し、McCool 群の Johnson 像たちが、自由 Lie 代数の微分代数のある部分 Lie 代数に含まれていることなどが分かった。

(4) 自由群の $SL(m, \mathbb{C})$ 表現の座標環に対する Johnson-森田理論の構築

この研究は (1) の研究の一般化である。自由群の $SL(m, \mathbb{C})$ 表現全体のなす集合上の複素数値関数全体のなす環において、表現の行列の各成分とる関数たちで全体生成される部分環を考える。すると、この環には自由群の自己同型群が自然に作用し、あるイデアルたちの降下フィルトレーションが定まる。このイデアル列の次数商の GL 加群として構造を決定した。また、このイデアル列の冪零商に自明に作用するような自由群の自己同型たちのなす部分群は、自由群の自己同型群に中心的降下列を定める。この降下列が、次数ごとに Andreadakis-Johnson フィルトレーションを含むことを示した。特に、次数が低い部分では両者は一致することがわかり、すべての次数で一致するのではないかと予想の下、現在も研究を進めている。

以上が主な研究成果であるが、IA 自己同型群の 2 次元コホモロジー群に関しては特筆すべき結果は得られなかった。今後は視点を変えて、位相幾何学的な観点からの研究に注力していきたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

- (1) Takao Satoh; The Johnson-Morita theory for the ring of Fricke characters of free groups, Pacific Journal of Mathematics, 275 (2015), 443-461. 査読有。

- [dx.doi.org/10.2140/pjm.2015.275.443](https://doi.org/10.2140/pjm.2015.275.443).
- (2) Takao Satoh; On the basis-conjugating automorphism groups of free groups and free metabelian groups, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society 158 (2015), 83-109. 査読有 .
doi:10.1017/S0305004114000619.
- (3) Eri Hatakenaka and Takao Satoh; On the graded quotients of the ring of Fricke characters of a free group, Journal of Algebra, 430 (2015), 94-118. 査読有 .
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.01.027>.
- (4) Eri Hatakenaka and Takao Satoh; On the rings of Fricke characters of free abelian groups, Journal of Commutative Algebra, vol. 7, No. 4, Winter 2015, 545-565. 査読有 .
DOI:10.1216/JCA-2015-7-4-545.

〔学会発表〕(計 17 件)

(1) Takao Satoh; On the rings of $SL(2, \mathbb{C})$ -characters of free groups, Geometry of Manifolds and Group Action, Adam Mickiewicz University, Slubice, Poland, 13th September 2013.

(2) Takao Satoh; On the rings of $SL(2, \mathbb{C})$ -characters of free groups, East Asian Conference on Algebraic Topology 5, 2nd December 2013, the Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Science, Beijing, China.

(3) Takao Satoh; The Johnson-Morita theory for the rings of Fricke characters of free groups, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, 14 February 2014.

(4) Takao Satoh; On the Johnson homomorphisms of automorphism groups of free groups, Workshop on Algebraic Topology and Its Applications, Dalian University of Technology, 6 August 2014.

(5) Takao Satoh; Some problems on the Johnson homomorphisms and related topics, Workshop on Algebraic Topology and Its Applications, Dalian University of Technology, 7 August 2014.

(6) Takao Satoh; The Johnson-Morita

theory for the rings of Fricke characters, Glances@Manifolds, Uniwersytet Jagiellonski, Krakow, Poland, 18 July 2015.

(7) Takao Satoh; On the Johnson homomorphism of the automorphism groups of free groups, Workshop on Automorphism groups of free groups, University of Copenhagen, Denmark, 9 November, 2015.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究代表者
佐藤 隆夫・東京理科大学・理学部第二部
数学科・准教授 (Takao Satoh・Department of
Mathematics, Faculty of Science Division
II, Tokyo University of Science・Associate
Professor)

研究者番号 : 7 0 5 3 3 2 5 6

(2)研究分担者
()

研究者番号 :

(3)連携研究者
()

研究者番号 :

