

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：34428

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740060

研究課題名(和文) 液膜流の長波近似に関する数学的考察

研究課題名(英文) Mathematical consideration of the long-wave approximation of the liquid thin film flows

研究代表者

友枝 恭子 (Tomoeda, Kyoko)

摂南大学・理工学部・講師

研究者番号：90611898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：斜面を流れる非圧縮性粘性流体について考える。この運動はNavier-Stokes方程式の自由表面問題として定式化されるが、直接解析することが困難のため、長波長近似法により近似方程式を導出し解析する。長波長近似の数学的正当性については、斜面の傾斜角とレイノルズ数が十分小さい場合について示されている。が、具体的な範囲は数学的に分かっていないため、対応する線形化作用素のスペクトルを調べた。そしてゼロ固有値を持たないときのレイノルズ数を計算した。

研究成果の概要(英文)：We consider the motion of a viscous incompressible fluid flowing down an inclined plane under the effect of gravity. The fluid motion is governed by the Navier-Stokes equations with the free boundary conditions. When the Reynolds number and the angle are sufficiently small, the mathematical justification of the long-wave approximation is known. To obtain a specific range of this 'sufficiently small Reynolds number', we examine the spectra of the compact operator arising the linearized problem. Then we calculate about a range of the Reynolds number, when the linear operator has a non-zero eigenvalue.

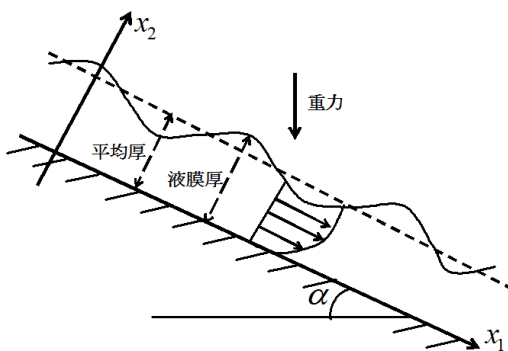
研究分野：数学解析

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 自由表面問題

1. 研究開始当初の背景

斜面を流れる(水などの)非圧縮粘性流体について考える。流体は斜面を流れるとき表面に薄い膜(液膜)を形成しながら流れる。このような流れを液膜流と呼ぶ。液膜流に関する物理研究の歴史は古く、1948年に Kapitza が実験により壁面上の液膜流から有限振幅波を発見したことから始まる。1957年に Benney は表面張力を考慮しない場合、液膜流の基礎方程式系から長波長近似により Benney 方程式を導出し、その方程式を調べることで有限振幅波の存在を示した。そして Gjevik は 1970 年に表面張力を考慮した場合、長波長近似により Benney-Gjevik 方程式を導出し、この方程式の数値実験により有限振幅波の挙動を調べた。また液膜流モデルから KdV の摂動系を導出し、ここから進行波の存在を示した結果もある。一方、液膜流の基礎方程式系を直接解析することにより、得られた結果もある。液膜流の基礎方程式系は重力の下非圧縮 Navier-Stokes 方程式の自由表面問題として定式化される。西田・寺本・Win (1993) は斜面の傾斜角と Reynolds 数が十分小さい場合、十分小さい初期値に対して、時間大域的な周期解の一意存在性を示し、その解に対する指数的減衰評価を示した。また西田・寺本・吉原 (2005) の Hopf 分岐に関する結果もある。このように液膜流の基礎方程式系、(長波長近似などの手法により)導出された近似方程式などの個々に関する考察とそれにより得られた結果はあるにも関わらず、双方を繋ぐ結果については余り得られていないのが現状であった。

2. 研究の目的



液膜流の基礎方程式系は重力の下非圧縮 Navier-Stokes 方程式の自由表面問題として定式化される。この基礎方程式系は、1) 液膜厚が未知関数であること 2) 境界条件に強い非線形性を伴うことから直接計算することは困難である。この困難さを解決するための一つとして長波長近似によって比較的解析しやすい方程式を導出する。基礎方程式系を無次元化すると(平均厚 h)/(波長 l)

を表す無次元パラメータが現われる。長波長近似とは、この基礎方程式系の速度ベクトル u を $u = \epsilon u_0 + \epsilon^2 u_1 + \dots$ に関して n 次の項まで漸近展開した後 (n : 非負整数) 方程式系に代入し形式的に $\epsilon^n = 0$ ($1 \leq n \leq n+1$) とすることによって n 次近似方程式を導出する方法である。これによって導出された近似方程式と液膜流の基礎方程式系との数学的正当性を示すために、まずはそれぞれの方程式に対して解が存在することを示す必要がある。水平方向に周期的な摂動を課した場合、液膜流の基礎方程式系に対する解の存在性は、「研究開始当初の背景」で述べたように) 西田・寺本・Win (1993) によって示されている。液膜流の基礎方程式系と長波長近似によって得られる近似方程式の数学的正当性については、Bresch-Noble (2007), 井口・白石・上野 (2016), 井口・上野 (preprint) の結果がある。が、先に述べたように解の存在性が示されているのは、斜面の傾斜角と Reynolds 数が十分小さい場合に限られているため、基礎方程式系と(長波長近似によって得られる)近似方程式の数学的正当性もこの範囲でしか得られていない。そこで、数学的正当性が保証される斜面の傾斜角と Reynolds 数を調べ、この範囲外での基礎方程式系と近似方程式の関係性を調べることにした。

3. 研究の方法

参考文献 (Benney (1957) と Gjevik (1970) 等) を読み、長波長近似の方法論とそれにより近似方程式が得られる仕組みを勉強した。そして、実際に液膜流の基礎方程式系から近似方程式として Benney 方程式や Benney-Gjevik 方程式が導出されることを確認した。この得られた近似方程式の解のプロファイルを調べるため、専門家と研究連絡・情報交換を行った。

寺本恵昭教授(摂南大学)との共同研究では、空間 2 次元における液膜流の基礎方程式系について、特に水平方向へ周期的な摂動を課した場合について考察した。液膜流の基礎方程式系に対する線形化問題について、対応する線形化作用素のスペクトルを調べることで解が安定であるための Reynolds 数と傾斜角の範囲を導出しようとした。この範囲を導出するためには、Korn 不等式の最良定数が必要であった。そこで Korn 不等式の最良定数に関して得られた成果を研究集会で発表し、国内外の研究者から意見をもらうことで問題解決の手がかりを探した。線形化作用素のスペクトルを詳細に調べるためには、先行研究で得られたレゾルベント評価を更に精密化する必要があった。そこで、より精密なレゾルベント評価法を見つけるために寺本教授とセミナーを行った。

問題解決に向けた証明法を構築し、また効率よく計算するためには、国内外の研究者と積極的な研究連絡・情報交換が不可欠である。

そこで、伊東恵一教授(元摂南大学、現立教大学)と共に下記の研究集会を開催し、問題解決に努めた。

研究集会名 : Dynamical Systems in Mathematical Physics

日時 : 2015年2月23日~2月24日

会場 : 京都大学数理解析研究所 1階 110号室

主催者 : 友枝恭子(摂南大学・理工), 伊東恵一(摂南大学・理工)

講演者(所属) 講演題目

Raphael Lefevere(Paris 7.)

Macroscopic Laws as Laws of Large Numbers: the Case of Fick's Law in Lorentz gases

千葉逸人(九州大学)

A Spectral Theory of Linear Operator on a Gelfand Triplet and its Applications to Dynamics of Coupled Oscillators

福島竜輝(京都大学)

Localization of Brownian Motion in Heavy Tailed Poisson Potential

宮路智行(明治大学)

Bifurcation Analysis of a Billiard Problem in Non-linear and Non-equilibrium Systems

廣島文生(九州大学)

Mass renormalization and ground states in QFT

伊東恵一(摂南大学)

Block Spin Transformation of 2D Sigma Model, Toward Solving a Millennium Problem

Ho Lee (Kyung Hee Univ.)

Global Properties of Solutions to the Einstein-Boltzmann Systems with Bianchi-I Symmetry

黒木経秀(名古屋大学)

Existence of nonperturbative nonlocal field theory on noncommutative space and spiral source in renormalization group approach of matrix model

柴山允瑠(大阪大学)

Perturbation Theory in Celestial Mechanics

松江要(統計数理研究所)

Rigorous Numerics of Global Orbits for Fast-Slow Systems

曾我幸平(慶應義塾大学)

Stochastic Characterization of Numerical

Viscosity

大林一平(京都大学)

Analysis of basin of attraction for bipedal walking models from the viewpoint of hybrid dynamics and saddle dynamics

4. 研究成果

「研究の方法」で述べた 寺本恵昭教授との共同研究では、主に線形化問題に現れる線形化作用素のレゾルベントがコンパクトであること、さらにこの作用素がセクトリアルであることを示した。線形化作用素がコンパクトなレゾルベントを持つこと、作用素がセクトリアルであることは、西田 - 寺本 - 吉原(2005)で示されていた。我々は、液膜流の基礎方程式系に対応する領域を直接扱うことによって、より精密な評価を与えることが出来た。この結果を踏まえて臨界 Reynolds 数と Weber 数の考察を行い、対応する線形化作用素の固有値を詳細に調べることで固有値が 0 を持たないときの Reynolds 数と Weber 数の範囲を傾斜角と波長によってパラメータ付けすることが出来た。ここで構築した手法は、壁面上を流れる液膜流に対しても有効であると考えている。更に線形化作用素の固有値の実部が負になるときの Reynolds 数と Weber 数を導出するための計算も行った。

液膜流の基礎方程式系から長波長近似によって導出される近似方程式の第 0 近似は、保存系の方程式であることが確認できた。また保存系方程式の数値計算に関する専門家と研究連絡・情報交換を行い、解のプロファイルを調べるための手法構築に向けてある程度方向性を定めることが出来た。この結果を踏まえて構築される手法は、解のプロファイルを調べる上で非常に有効である。さらに手法を改良することで他の現象への応用が期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Yohei Sasaki, Yoshiaki Teramoto, Kyoko Tomoeda,

Two dimensional viscous free surface flow down an inclined plane, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 164 (2015) 45-49.

Yoshiaki Teramoto, Kyoko Tomoeda,
On a linearized system arising in the study of viscous surface flow down an inclined plane
ANNALI DELL' UNIVERSITA' DI FERRARA,

60 (2014) 289-306.

[学会発表](計 15 件)

Kyoko Tomoeda,
A range of Reynolds number for stationary solution of the viscous incompressible fluid flow down an inclined plane,
Algoritmy 2016, スロバキア, 2016年3月17日.

寺本 恵昭, 友枝 恭子,
斜面を流れる非圧縮性粘性流体の安定な定常解に関するレイノルズ数の範囲について,
2015年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2015年12月21日,

Kyoko Tomoeda, Yoshiaki Teramoto,
Linear problem for viscous free surface flow,
SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, アメリカ, 2015年12月9日.

友枝 恭子,
Two dimensional viscous free surface flow down an inclined plane,
第40回偏微分方程式札幌シンポジウム, 北海道大学, 2015年8月19日.

友枝 恭子,
自由表面を持つ非圧縮性粘性流体の数学解析,
研究集会「数学と現象 in 伊豆大島」, 大島町役場大会議室, 2015年7月30日.

友枝 恭子,
Linear problem for viscous free surface flow,
大阪市大・大阪府大合同「南大阪応用数学セミナー」, 大阪府立大学, 2014年11月22日.

Kyoko Tomoeda,
Linear problem for viscous free surface flow,
The 2nd Slovak-Japan Conference on Applied Mathematics 2014, スロバキア, 2014年9月6日.

Kyoko Tomoeda,
Linear problem for viscous free surface flow,
The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, スペイン, 2014年7月8日.

友枝 恭子,
Linear problem for viscous free surface flow,
明治非線形数理セミナー, 明治大学, 2014年3月11日.

Kyoko Tomoeda,
Optimal Korn's inequality for Solenoidal vector fields on a periodic slab with some applications,
Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Japan-China Joint Project for Young Mathematicians 2013, 龍谷大学, 2013年10月26日.

Kyoko Tomoeda,
Optimal Korn's inequality for Solenoidal vector fields on a periodic slab,
Seminar on Nonlinear PDE in Nara, 奈良女子大学, 2013年3月11日.

友枝 恭子,
Optimal Korn's inequality for Solenoidal vector fields on a 2D periodic slab,
松山解析セミナー, 愛媛大学, 2013年2月9日.

友枝 恭子,
Optimal Korn's inequality for Solenoidal vector fields on a periodic slab,
弘前非線形方程式研究会, 弘前大学, 2012年11月3日.

Kyoko Tomoeda,
Optimal Korn's inequality for Solenoidal vector fields on a periodic slab,
Swiss-Japanese Seminar, チューリッヒ大学, 2012年12月18日.

Kyoko Tomoeda,
Optimal Korn's inequality for solenoidal vector fields on a periodic slab,
Parabolic and Navier-Stokes Equations 2012, ポーランド, 2012年9月7日.

6. 研究組織

(1)研究代表者 友枝 恭子 (Kyoko Tomoeda)
摂南大学・理工学部・講師
研究者番号: 90611898