

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：16401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740068

研究課題名(和文)全ての辺の色が異なる部分グラフの新たな拡張とBH予想への応用

研究課題名(英文)A new generalization of subgraphs whose edges have distinct colors and its applications to BH conjecture

研究代表者

鈴木 一弘 (Suzuki, Kazuhiro)

高知大学・教育研究部自然科学系・助教

研究者番号：50514410

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：全ての辺の色が異なる部分グラフを異色部分グラフと呼ぶ。本研究では、関数 g, f : 色集合、非負整数集合 に対し、どの色 c の辺も $g(c)$ 本以上 $f(c)$ 本以下であるような部分グラフを (g, f) -異色部分グラフと定義し、その存在条件に関する研究を行い、次の成果を得た。

(1) 一般の辺着色グラフに (g, f) -異色全域木が存在するための必要十分条件を発見・証明した。(2) 最大次数を抑えた異色全域木の研究を行った。(3) 異色全域木の既存定理を拡張した。(4) 二部グラフに全域 k 木が存在するための条件を発見・証明した。(5) 着色された集合の元を横一列に並べた着色点列を均質に分割する補題を発見・証明した。

研究成果の概要(英文)：A subgraph whose edges have distinct colors is called a heterochromatic subgraph. We define a (g, f) -chromatic subgraph as a subgraph having at least $g(c)$ and at most $f(c)$ edges colored with c for any color c , where g and f are functions from a color set to the set of non-negative integers. In this research, we studied conditions for existence of a (g, f) -chromatic subgraph in edge-colored graphs, and we got the following results.

(1) We got a necessary and sufficient condition for existence of a (g, f) -chromatic subgraph in edge-colored graphs. (2) We studied heterochromatic subgraphs with some upper bound of maximum degree. (3) We generalized some previous results on heterochromatic subgraphs. (4) We got a sufficient condition for existence of a spanning k -tree in bipartite graphs. (5) We got a Lemma for balanced partition of a sequence of colored elements.

研究分野：グラフ理論、離散幾何学

キーワード：グラフ理論 離散幾何学 全域木 辺着色 辺彩色 異色全域木 異色部分グラフ

1. 研究開始当初の背景

グラフ着色分野は、地図を4色で塗り分ける「4色問題」や、6人集まれば互いに知り合いの3人組、もしくは互いに見ず知らずの3人組が作れるという「ラムゼー問題」を筆頭に、古くから世界中で数学者のみならず一般の人達からも興味を集めている分野である。

例えば「ラムゼー問題」は、6人を6個の頂点で表現し、頂点同士が知り合いならば赤辺でつなぎ、そうでなければ青辺でつないだ時、そのグラフには赤い三角形か青い三角形があるか？という辺着色問題として考えることができる。同様に、三角形に限らずサイクルやパスや木など様々な「単色部分グラフ」の存在が研究されている。

単色部分グラフとは、「全ての辺の色が同じ」部分グラフのことである。一方、単色の逆、即ち「全ての辺の色が異なる」部分グラフの存在を調べる研究がここ十数年の間で流行を見せている。「全ての辺の色が異なる」部分グラフのことを異色部分グラフと呼ぶ。

1996年に Brualdi らは完全グラフにおける異色全域木(全頂点を覆う木で全辺の色が異なるもの)の存在に関する次の予想(以下 BH 予想)を発表した。

BH 予想 [Brualdi and Hollingsworth, 1996, JCTB]

辺彩色された $2n(6)$ 頂点完全グラフの辺集合は、 n 個の異色全域木に分解することができる。

ここで、辺彩色とは、隣接する辺同士、即ち共通の端点を持つ辺同士の色異なるように辺着色することを言う。言い換えれば、どの頂点に注目してもその頂点に接続している全ての辺の色が異なるように辺着色することである。図1に辺彩色された6頂点完全グラフの異色全域木分解の例を示す。

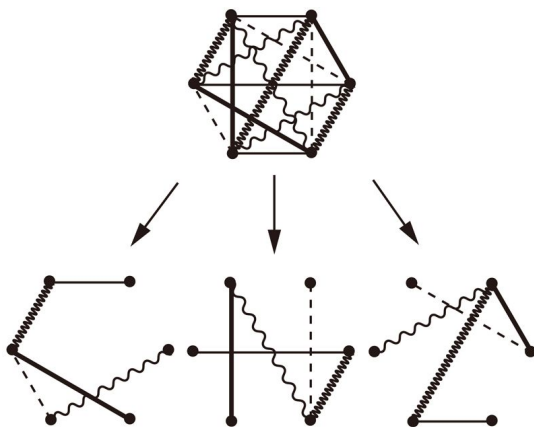


図1 BH 予想 ($2n=6$ の場合の例)

Brualdi らは同論文の中で、2個の異色全域木の存在を証明している。これに対して研究代表者らは、3個の場合について証明をした [Kaneko, Kano, Suzuki, 2003, preprint]。しかしながら、4個以上のケースは現時点でも未解決であり、十数年の間、解決のめどは全く立っていなかった。

BH 予想に進展が無い中、研究代表者は、完全グラフに限らない一般の辺着色グラフに異色全域木が1個以上存在するための必要十分条件を証明した [Suzuki, 2006, Graphs Combin.]. 最近になって、その証明法が実は異色全域木に限らず、より一般的な着色全域木の存在についても有効であることに気づき、異色部分グラフを一般化するという着想に至り、次の新定義を提案した。

定義：f-異色部分グラフ

異色部分グラフとは、言い換えればどの色も高々1本しか許されないような部分グラフのことである。そこで、各色ごとに許容できる本数を関数 f : 色集合 \rightarrow 非負整数集合 によって指定し、どの色 c の辺も高々 $f(c)$ 本しかないような部分グラフとして一般化したものを f-異色部分グラフと呼ぶ。

任意の色 c に対して $f(c)=1$ の時、f-異色部分グラフは従来の異色部分グラフを意味する。

図2に f-異色全域木の例を示す。色集合を $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ とし、 $f(1)=3$ 、 $f(2)=1$ 、 $f(3)=3$ 、 $f(4)=0$ 、 $f(5)=0$ 、 $f(6)=1$ 、 $f(7)=2$ とすると、このグラフには、どの色 c も $f(c)$ 本以下であるような全域木が存在する。

また、研究代表者は BH 予想を次のように一般化した。

一般化 BH 予想

f-辺彩色された $2n(6)$ 頂点完全グラフの辺集合は、 n 個の f-異色全域木に分解することができる。

ここで、f-辺彩色とは、どの頂点にも、色 c の辺は高々 $f(c)$ 本しか接続しないように色を塗ることである。一般化 BH 予想において任意の色 c について $f(c)=1$ のとき、元々の BH 予想となる。

上記の一般化により、関数 f に応じた段階的な研究を可能とした。即ち、異色全域木の「どの色も高々1本まで」という非常に強い制限を、関数 f を用いて柔軟に設定できるようにすることで、弱い本数制限から徐々に強くしていくという段階的な解決を図るという手法によって BH 予想の研究に進展を与えた。

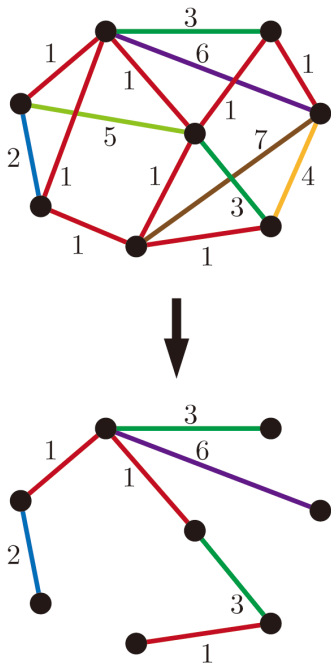


図 2 f-異色全域木

BH 予想の進展が期待できるだけにとどまらず、既存の異色部分グラフの問題が全て f-異色部分グラフの問題に刷新でき、それら全ての問題において、関数 f の条件による段階的な研究ができるようになり、新たな着色分野として開拓されていくことが期待される。

これは、過去に 1-因子 (完全マッチング) から始まった因子研究分野が f-因子という新定義の登場によって飛躍的に発展した歴史と非常に良く似ている。

研究代表者は、さらに、完全グラフに限らない一般の辺着色グラフに m 個の連結成分からなる f-異色全域林が存在するための必要十分条件を発見・証明し、それを応用することで、f-異色全域木や全域林が存在する十分条件を証明する手法を確立した。

2. 研究の目的

本研究では、最初に f-異色部分グラフの更なる一般化として、 (g, f) -異色部分グラフを定義する。

定義: (g, f) -異色部分グラフ

関数 g, f : 色集合 非負整数集合 に対し、どの色 c の辺も $g(c)$ 本以上 $f(c)$ 本以下であるような部分グラフを (g, f) -異色部分グラフと呼ぶ。

そして、この (g, f) -異色部分グラフについての研究を中心とした以下の 4 つを研究課題とした。

(1) 辺着色グラフに (g, f) -異色全域木が存在するための必要十分条件を明らかにする。

(2) 異色全域木の既存の定理を拡張する。

(3) BH 予想解決の糸口を見つけるため、最大次数を抑えた全域木の存在条件を明らかにする。

(4) より一般的な「着色された集合」に潜む性質を明らかにする。

3. 研究の方法

(1) f-異色全域木が存在するための必要十分条件を用いて、辺着色グラフに (g, f) -異色全域木が存在するための必要十分条件を証明する。

(2) 辺彩色された完全グラフに 2 つの辺素な異色全域木が存在することの数学的帰納法による証明を参考にして、既存定理の拡張や、次数を抑えた全域木の存在条件を証明する。

(3) 「着色された集合」の元を一列にならべ、色のバランスを保つ分割が可能な条件を示し、それを捕題として利用して平面上のグラフ埋め込み問題を考える。

4. 研究成果

(1) 辺着色グラフに (g, f) -異色全域木が存在するための必要十分条件を発見・証明した。

(g, f) -異色全域木は f-異色全域木でもあるので、少なくとも前述の「辺着色グラフに f-異色全域木 (1 個の連結成分からなる f-異色全域林) が存在するための必要十分条件」を満たしていなければならない。

本研究では、それに加えてどのような条件があれば「辺着色グラフに (g, f) -異色全域木が存在するための必要十分条件」となるかを研究し、次の定理を得た。

定理 [Suzuki, 論文執筆中]

色集合 C の色で辺着色された n 頂点のグラフ G に m 個の連結成分からなる (g, f) -異色全域林が存在するための必要十分条件は、任意の色 $c \in C$ について $g(c) \leq f(c)$ であり、 $m \leq n - \sum_{c \in C} (g(c) - f(c))$ を満たし、さらに、任意の色集合 $R \subseteq C$ について、 R に含まれる色の辺を元のグラフ G から全て除去したグラフの連結成分数が高々 $\min\{m + \sum_{c \in R} f(c), n - \sum_{c \in C-R} g(c)\}$ 個となることである。

(2) BH 予想が仮に正しければ、1 つ 1 つの異色全域木は star ではない。なぜなら、ある異色全域木が star ならば、その中心点 v に接続する $2n-1$ 本の辺はすべてその異色全域木の辺であるため、別の異色全域木は頂点 v

を持てなくなるからである。同様に考えると、1つ1つの異色全域木の最大次数は $2n-1$ よりずっと小さいはずである。そこで、最大次数が大きすぎない異色全域木の存在に興味を沸き、次の定理を得た。

定理[Shirakawa, Suzuki, 論文執筆中]

G を n 頂点辺彩色完全グラフ、 k を整数 ($2 \leq k \leq n-2$, または $k=n$)、 x と y を G の異なる 2 頂点とすると、 G には x と y の次数和が k となるような異色全域木が存在する。

(3) Brualdi らは、辺彩色された 5 頂点以上の完全グラフには辺素な 2 つの異色全域木が存在することを示したが、その証明はマトロイドを用いたものであった。その後、研究代表者らが、数学的帰納法によって初等的に証明できることを示した。

本研究では、この問題を f -異色全域木問題として拡張した次の定理を、初等的に示すことができた。

定理[Suzuki, 論文執筆中]

5 頂点以上の f -辺彩色完全グラフには辺素な 2 つの f -異色全域木が存在する。

(4) 前述の通り、BH 予想が正しければ 1 つ 1 つの異色全域木の最大次数は大きすぎないはずである。その意味で、全域木の最大次数を制限した問題を研究することには意義がある。そこで、最大次数を制限した全域木が二部グラフに存在するための条件について研究した。

ここで、いくつかの用語を定義しておく。

最大次数が k である木を k -木という。グラフの頂点集合の部分集合でどの 2 点間にも辺がないものを独立点集合とよぶ。グラフ G の k 点からなる独立点集合の各頂点の G における次数の和の最小値を $\alpha_k(G)$ と書く。

n 頂点連結グラフ G が $\alpha_k(G) \leq n$ をみたすならば G には全域 k -木が存在することが知られている。

本研究では、 A と B を部集合とする連結二部グラフ G について次の定理を得た。

定理 [Kano, Ozeki, Suzuki, Tsugaki, Yamashita [1]]

A と B が $|A| \leq |B| \leq (k-1)|A|+1$ をみたすとき、 $\alpha_k(G) \leq |B|$ ならば G には全域 k -木が存在する。

(5) 本研究課題は着色された集合に潜む性質を研究するものである。着色集合に関する

定理の証明に数学的帰納法を用いる場合、もとの集合を着色条件が変わらないように均質に分割する必要がある。本研究では、着色集合の元を横一列に並べた着色点列の均質分割に関して次の補題を得た。

定理[Kano, Suzuki, Uno [2]]

着色点列 X の始点と終点が同色で、どの色の点の数も $|X|/2$ の切り上げ以下であれば、ある左右二分分割 $X=D_1 \cup D_2$ が存在し、着色点列 D_i の各色の点の数が $|D_i|/2$ の切り上げ以下となっている。

この補題の副産物として、離散幾何学における 2 色点集合上の交互完全マッチングや交互全域木の定理を 3 色以上の点集合に対して拡張することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

[1] Kano, Mikio; Ozeki, Kenta; Suzuki, Kazuhiro; Tsugaki, Masao; Yamashita, Tomoki: Spanning k -trees of Bipartite Graphs. The Electronic Journal of Combinatorics 22, P1.13 (2015-01). (査読あり)

[2] Kano, Mikio; Suzuki, Kazuhiro; Uno, Miyuki: Properly colored geometric matchings and 3-trees without crossings on multicolored points in the plane. Discrete and Computational Geometry and Graphs: 16th Japanese Conference, JCDCCG 2013, Tokyo, Japan, September 17-19, 2013, Revised Selected Papers, LNCS 8845 Springer-Verlag, pp.96-111 (2014-11-21). (査読あり)

[学会発表](計 2 件)

[3] Kano, Mikio; Suzuki, Kazuhiro; Uno, Miyuki: Properly colored geometric matchings and 3-trees without crossings on multicolored points in the plane. 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCCG2 2013), pp.94-95 (2013.09.17-19). (東京理科大学)

[4] 鈴木一弘: (g, f) -chromatic forests. 離散数学とその応用研究集会 2012, pp.21-22 (2012-08-10). (茨城大学)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 一弘 (SUZUKI Kazuhiro)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部

門・助教

研究者番号：50514410

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし