

平成 2 6 年 5 月 3 0 日現在

機関番号 : 3 2 6 6 0

研究種目 : 若手研究(B)

研究期間 : 2012 ~ 2013

課題番号 : 2 4 7 4 0 0 7 0

研究課題名 (和文) グラフの alliance が存在するための十分条件とそのアルゴリズム

研究課題名 (英文) Alliances in graphs and its algorithm

研究代表者

木村 健司 (KIMURA, Kenji)

東京理科大学・工学部・助教

研究者番号 : 3 0 5 4 8 1 5 2

交付決定額 (研究期間全体) : (直接経費) 1,100,000 円、(間接経費) 330,000 円

研究成果の概要 (和文) : 本研究の目的はグラフのallianceの性質を調べることである。特に、最小な頂点数を持つallianceの頂点数の上限に興味がある。今までにも一般のグラフに対するdefensive allianceやoffensive allianceの研究が行われていた。本研究では、グラフを限定することにより上限を改善したり、また頂点の帰属を定めるallianceという新しい概念も導入し、様々な性質を調べた。さらに、これらのallianceを構築するアルゴリズムも考案した。

研究成果の概要 (英文) : We extend the notion of a defensive alliance to it with proscribed and prescribed vertices. We proved some upper bounds of order of a defensive alliance for any pair of a graph, and proscribed and prescribed vertices. If a graph is a tree, then we obtain a new upper bounds of order for a defensive alliance with prescribed vertex. Moreover, if a graph is a tree other than a path, then we obtain a new upper bounds of order for an offensive alliance.

研究分野 : 数学

科研費の分科・細目 : 数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード : graph alliance defensive alliance offensive alliance proscribed vertex prescribed vertex
グラフ アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

数学の分野でグラフの alliance に関する研究が行われていた。特に、defensive alliance の概念は情報の分野における web communities と呼ばれる概念と同値なもので、興味を持つ研究者が多かった。グラフの defensive alliance や offensive alliance に関する基本的な性質を調べる研究が行われていた。

2. 研究の目的

(1) 一般的なグラフにおける alliance の頂点数の上限を求める研究が行われていたので、限定したグラフにおける alliance の頂点数の上限を調べる。

(2) グラフの頂点は人や国、web サイトなどとして考えられるので、特定の頂点を含む、または、含まない defensive alliance の性質を調べる。

(3) グラフの alliance を構成するアルゴリズムを考案する。

3. 研究の方法

(1) 計算機実験により頂点数が小さいグラフに対しては数え上げを行い、alliance の性質を調べる。

(2) セミナーに積極的に参加し、発表・意見交換を行う。

4. 研究成果

(1) 一般のグラフにおいて指定した頂点を含む、または含まない defensive alliance に関する研究。 $G=(V, E)$ をグラフとし、 V, E をそれぞれ頂点集合、辺集合とする。頂点集合 S が G の defensive alliance であるとは、空でない頂点集合 $S \subseteq V$ に対して、

$$|N(x) \cap S| + 1 \geq |N(x) \cap (V - S)|$$

を満たす S のことをいう。 $N(x)$ は頂点 x の近傍を表す。defensive alliance に含まれる指定した頂点集合を K とし、defensive alliance に含まれない指定した頂点集合を M と記す。従って、ここで考える defensive alliance S は、 $K \subseteq S \subseteq (V - M)$ という条件を満たす。また、頂点数が最小である defensive alliance を mda と呼ぶ。

任意のグラフにおいて defensive alliance は存在する。しかし、 K, M の存在により、defensive alliance が存在しない場合も考えられる。従って、どのような (K, M) の組に対して defensive alliance が存在するかどうかを考察しなければならない。本研究では、組 (G, K, M) に対して、defensive alliance が存在するための必要十分条件を証明した。

また、与えられた組 (G, K, M) から defensive alliance を構成するアルゴリズムも考案した。

Fricke ら (2003) により、一般の n 頂点グラフにおける mda の頂点数の上限は $n/2$ の切り上げであることが示されている。この結果から、頂点を指定した場合の mda の頂点数の上限は、 $n/2 + |K|/2$ の切り上げであることが予想される。この予想を確かめるため以下の実験を行った。

G を 7 頂点以下の任意な連結グラフとする。すべての組 (G, K, M) に対して mda の頂点数を調べた。その結果、ある 7 頂点グラフに対して予想に反する組 (K, M) が存在することが分かった。しかし、いくつかの場合については上限の証明ができた。(i) $|M| = 2$ の時は、 $n - |M|$ 、(ii) $|K| = (n-1)/2$ の切り上げ、かつ、 $|M|=1$ の時は、 $n - |M|$ 、(iii) $|K|=n$ の時は、 n 、(iv) $|K|=n-1$ 、かつ、 $|M|=0$ の時は、 $n-1$ 、である。残りのまだ証明できていない場合については、以下の予想を立てている。(i) $|K| < (n-1)/2$ の切り上げ、かつ、 $|M|=1$ の時、 $(n+|K|+|M|)/2$ の切り上げ、(ii) $1 \leq |K| \leq n-2$ 、かつ、 $|M|=0$ の時、 $(n+|K|+|M|)/2$ の切り上げ、である。

グラフの mda を求める問題は、整数計画問題として定式化することにより、実験を行った。defensive alliance の条件を満たしつつ、頂点数を最小化する問題である。これにより汎用ソルバーが使用可能となる。実験は上記で述べたものだけでなく、8~50 頂点連結グラフと $|K|=2, |M|=1$ を満たすものをランダムに 10 組発生させ、mda を 1 つ求める平均時間と全列挙にかかる平均時間を調べた。ここでいう、全列挙にかかる時間とは、mda を 1 つ求めた後に要した時間のことである。その結果、例えば 50 頂点グラフにおいて mda を 1 つ求めるのには 100 秒ほどかかっているのに対して、その後の全列挙には 1 秒ほどしかかかっていないことが分かった。この結果から、mda のを 1 つ求める時間を改善することが mda の全列挙に対してもかなり効果的であることが分かる。そこで、この整数計画問題を連続緩和することにより、mda の頂点数の下界値をもとめる問題として定式化しなおした。その結果、ある 50 頂点グラフに対して、mda を 1 つ求めるのにかかる時間を 1 秒ほどまで減らすことができた。また、下界値を求める時間は 0.1 秒ほどなので、全体として大幅な改善が出来たといえる。

上記で述べた実験結果は Mathematica を用いた場合だが、Ip_solve を使用すれば最初の整数計画問題は 50 頂点の場合、1/10000 の時間で mda を 1 つ求めらる。

この頂点を指定した defensive alliance の研究はまだ誰も行っていなかったもので、今後、この研究を元にたくさんの広がりが期待

される。

(2) 木において1つの指定した頂点を含む defensive alliance の頂点数の上限を求める研究。木とはサイクルを含まないグラフのことである。

グラフを木に限定することにより、mda の頂点数の上限が得られた。この場合の上限は $(|V_1|+1)/2$ の切り上げ、であることが分かった。ここで V_1 は木における次数1の頂点(葉)の集合を表す。また、この条件が等号で成立するための必要十分条件は木が spider である、ということも分かった。spider とは次数3以上の頂点を高々1つしか持たない木のことである。

木における指定した頂点を含むアルゴリズムを2種類考案した。1つ目のアルゴリズムは、指定した頂点を根として扱い、子の選び方として、子が根となる部分木を考えたと、葉の数が最小になるように子を選んでいく方法である。2つ目のアルゴリズムは、葉から順番に頂点を選び、最終的に根を選択する方法である。選び方は、その頂点を選んだら加えなければならない葉までの頂点数を数えておき、その数が小さい頂点を選ぶ、という方法である。どちらのアルゴリズムでも定理を証明することができる。

(3) 木において offensive alliance の頂点数の上限を求める研究。頂点集合 S が G の offensive alliance であるとは、空でない頂点集合 $S \subseteq V$ に対して、

$$x \in S, |N(x) \cap S| \geq |N(x) \cap (V-S)|$$

を満たす S のことをいう。 $S=N(S)-S$ であり、 S の境界と呼ぶ。また、頂点数が最小である offensive alliance を moa と呼ぶ。

Favaron(2004)らの研究により一般の n 頂点グラフにおける moa の頂点数の上限は $2n/3$ の切り下げ、であることは分かっていた。グラフを木に限定すると木が道の場合に moa の頂点数の上限である $n/2$ の切り下げで等号が成立することも示されていた。しかし、グラフが道以外の木である場合に関しては何も言及されていなかったため、この場合に関する moa の頂点数の上限を調べた。その結果、グラフが道以外の木であるならば、moa の頂点数の上限は $3n/8 + 9/8$ であることが分かった。

定理の条件を満たすアルゴリズムを考案することができた。

今後は defensive alliance の場合と同様に指定した頂点を含む、または含まない offensive alliance の性質を調べる問題に取り組みたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 件)

〔学会発表〕(計 10 件)

Takahiro Kawaura, Kenji Kimura, Naoto Niki, Defensive alliances with prescribed and proscribed vertices, *Forty-Fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, March 2014, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.

Kiyoshi Ando, Yoshimi Egawa, Kenji Kimura, Algorithm for defensive alliance with prescribed vertex in trees, *37th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, December 2013, The University of Western Australia, Perth, Australia.

Guillaume Bacquela, Yoshimi Egawa, Shigeki Imamura, Kenji Kimura, Akira Saito, offensive alliances in trees, *24th British Combinatorial Conference*, July 2013, University of London, Royal Holloway, the United Kingdom.

他 7 件

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

木村 健司 (KIMURA, Kenji)

東京理科大学・工学部・助教

研究者番号：30548152

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：