様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００７１

研究課題名（和文）枝分かれ構造を形成する時空パターンの数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis on spatio-temporal pattern to generate branching structures

研究代表者
池田　幸太（Ikeda, Kota）

明治大学・公私立大学の部局等・講師

研究者番号：５０５５３３６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：興奮系反応拡散方程式系を一般的に扱い、パルス型の進行波解が持つ 性質について調べた。進行波解に関する線形化固有値問題を扱うことで、拡散係数の大きさに 応じて解が不安定化することを示した。次に燃焼モデルに現れる指状パターンの解析を行うた め、数理モデルを単純化した。パルス型の進行波解は扱うのが難しいため、遷移層型の界面が 現れるモデル方程式の構築を行った。このモデルのパラメータは実験的に測定可能である。

研究成果の概要（英文）：We studied a traveling wave solution with pulse shape in general reaction-diffusion systems with excitability. We first derived a linear eigenvalue problem with respect to the traveling wave solution and proved that the solution becomes unstable dependently on a diffusion coefficient. Next we proposed a simplified model for combustion to study a spatio-temporal pattern, called "fingering pattern". This model generates an interface. Also, we can measure parameter values in our model experimentally.

研究分野：パターン形成の数理

キーワード：自己組織化

１．研究開始当初の背景

形態形成過程には枝分かれ構造がしばしば見られる。例えば、肺の上皮組織に見られる枝分かれ、劣環境下のバクテリアが示す時空間パターンは、初期段階における一様状態が枝分かれした後にダイナミックな遷移過程を経て、自己組織的に形成される。これらの現象は反応拡散方程式によってモデル化され、数値計算を通じて再現されている。そこで、多様な空間パターンを厳密に構成し、その数理的メカニズムを解明することが本研究での目的である。

枝分かれ構造は、物理、化学、生物現象において数多く観察される。微小重力環境下におけるすす燃焼では一様燃焼面は不安定であり、指状パターンに遷移する。この現象は対流効果を抑えた燃焼実験を用いて地上で再現された（O.Zik, Z.Olami, E.Moses, Phys. Rev. Lett., 81, pp.3836 (1998)）。ベロウソフ・ジャボチンスキー反応（BZ 反応と略される）には同心円や螺旋型パターンが現れることが知られているが、特殊な実験状況下では定常状態を示す微細なパターンも現れる（V.K.Vanag, I.R.Epstein, Int. J. Dev. Biol., 53, pp.673--681 (2009)）。これらの空間パターンも一様な界面が不安定化した後に現れる特徴を持つことから、枝分かれ構造の一種である。これらの現象は反応拡散方程式によってモデル化され、空間パターンが数値計算によって再現されている。モデルには空間非一様性や不自然な境界条件は含まれておらず、枝分かれ構造は自己組織的に構成されていると言える。

そもそも空間パターンとは、空間的に非一様で、異なる状態を分ける界面を持つものである。界面は主に、一定速度で動くものと定常状態にあるものの２種類に分類され、これらはそれぞれ進行波解と定常解を用いて表される。これまでに申請者は反応拡散方程式における進行波解を用いた界面の構成に成功し、その安定性に関する研究を行った。また、これまでの研究では定常解を用いた界面の安定性に関する研究を行った。これまでの研究では、進行波解が界面不安定性を引き起こす分岐点を求めることに成功した。これは枝分かれ構造の出現を決定するパラメータの特定につながる可能性を示唆している。この結果に基づき、界面が不安定化した後に現れる空間パターンの定性的な性質を解析し、枝分かれ構造に現れる普遍原理を解明する。

次の段階として界面の最大不安定モードを特定する必要があり、固有値問題の詳細な解析が必要となる。最大不安定モードを得ることで波状界面や指状パターンの空間スケールを決定した後、自由境界問題を導出する。次に、その自由境界問題における時空間パターンを厳密に構成する。

２．研究の目的

枝分かれ構造の形成における初期段階は、界面を１つだけ持つ場合（遷移層型）と２つ持つ場合（パルス型）に分類される。そこで、遷移層型の界面が不安定化して現れる微細パターンの構成(研究課題１)と、パルス型の界面の不安定化に伴って生じる波状界面、指状パターンの厳密な構成(研究課題２)を行うことを目標とする。さらに、実験や観測から得られたパラメータの値を比較することで、得られた結果の妥当性を検証する。

(1) 遷移層型の界面が不安定化した後に現れる微細な定常空間パターンを構成する。先行研究（M.Taniguchi, Y.Nishiura, SIAM J.Math. Anal., 25, 1, pp.99--134 (1994) 等）で示されているように、双安定反応拡散方程式に現れる平面的な界面は不安定化した後に微細パターンと呼ばれる空間パターンへと遷移する。さらに微細パターンが持つ空間スケールは、界面の最大不安定モードと一致する。ここで最大不安定モードとは、最大不安定固有値に対応する波数のことである。この事実を用いることで、微細パターンに付随する自由境界問題を導出することが可能である。この自由境界問題に対称性の高い空間パターンが存在することは既に証明されている（X.Chen, Y.Oshita, Arch. Ration. Mech. Anal., 186, 1, pp.109--132 (2007)）。しかしながら、平面的な界面から得られる微細パターンは異なる形状を有する上に多様であるため、解析的な研究は未だ不十分である。そこで、これまでに得られていない微細パターンを構成し、どの程度多様な解が存在可能であるかを検証する。

空間パターンを構成する際には、特異摂動法や縮約方程式が通常は有効である。しかしながら、特異摂動法を用いて固有値解析を行うと、不必要な高次の情報まで用いることになるため、一般的には計算が煩雑になる。一方、自由境界問題は本来の反応拡散方程式よりも少ない情報だけで解析を行うことができる。反応拡散方程式と自由境界問題は密接な関係を持つことが知られており、このアプローチは有効である（T.Ikeda, Y.Nishiura, SIAM J. APPL. MATH., 54, 1, pp.195--230 (1994)）。自由境界問題を導出する際、微細パターン特有の時空間スケール（Y.Nishiura, I.Ohnishi, Physica D, 84, 1-2, pp.31--39 (1995)）を用いる。

(2) パルス型の界面が不安定化した後に現れる波状界面、指状パターンの厳密な構成を行う。パルス型の解は物理、化学、生物分野に広く現れ、燃焼モデル、BZ 反応のモデル方程式（J.J.Tyson, P.C.Fife, J. Chem. Phys., 73, 5, pp.2224--2237 (1980)）、神経パルスの伝播を記述したモデル（J.Nagumo, S.Arimoto, S.Yoshizawa, Proc. IRE, 50, 10, pp.2061--2070 (1962)）等で観察されている。近年、パルス型定常解や進行波解に関する定性的性質は徐々に明らかになってきた

(H.Ikeda, T.Ikeda, J. Dynam. Differential Equations, Vol.2, no.1, pp.117--167 (2000))。特に、申請者によってパルス型進行波解の安定性解析が包括的に行われ、２つの拡散係数の比によって安定性が分類されることや、特定の係数比の下でのみ分岐が起こることが示された。パルス型進行波解に関する既存の研究で用いられている条件は限定的であったため、この結果はパルス型進行波解の普遍的な理解に大きく貢献した。

上記の研究では零固有値に近い実数値の不安定固有値に注目し研究を行っていた。一方で、最終的に現れる空間パターンの時空間スケールと付随する自由境界問題は最大不安定モードによって決定される。そこで、最大不安定モードに対応する固有値を求め、空間スケールとパラメータの関係を解明し、自由境界問題を導出する。先行研究では遷移層型の解に対する自由境界問題が導出されているが、パルス型の解に対応した自由境界問題は提案されていないことに注意する。

３．研究の方法

研究課題１と２において、遷移層型、もしくはパルス型の界面に関する安定性を調べることは重要である。本研究では、移流項を含み、かつ非線形項を一般的に表した、以下の反応拡散方程式系を取り扱った。

$$\begin{cases} \varepsilon\tau\dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta u - \varepsilon\lambda_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + f(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v - \lambda_2\dfrac{\partial v}{\partial x} + g(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

遷移層型の界面に関する性質は先行研究で調べられているので、本研究ではパルス型の界面に焦点を当てることとする。適当な条件下ではこの方程式には１次元空間における進行波解で、パルス型の形状を持つものが存在することが知られている。これは高次元のシリンダー領域においてパルス型の界面を持つ進行波解を表している。この解の安定性を解析的に調べるためには、固有値問題を導出し、実部正の固有値の存在を証明すれば良い。ただし、(1)から直接導出される固有値問題の解析は困難であったため、関数ｕの拡散係数を０に近づけることで、以下の固有値問題に帰着させることができる。

$$\begin{cases} \mu r_1 = -c_1'(v_1)(V'(0)r_1 + \psi(0)) - \varepsilon\omega_k r_1, \\ \mu r_2 = -c_2'(v_2)(V'(\rho)r_2 + \psi(\rho)) - \varepsilon\omega_k r_2, \\ \mu\psi = d\psi'' - d\omega_k\psi - (c+l_2)\psi' + G'(V)\psi, \\ d(\psi'(+0) - \psi'(-0)) = (G_+(v_1) - G_-(v_1))r_1, \\ d(\psi'(\rho+0) - \psi'(\rho-0)) = -(G_+(v_2) - G_-(v_2))r_2, \end{cases}$$

界面の進行方向と直交する方向に分けて考え、直交する方向はフーリエ級数を考えることによって、適当な波数を含む１次元の固有値問題を導出することができる。この固有値問題において、実部が正の固有値の存在を証明することで、パルス型の界面が高次元のシリンダー領域において不安定であることを一般的な枠組みで示す。

次に、高次元の時空パターンを解析するため、既存の燃焼モデルを見直し、解析がよりしやすく、かつ実験的に測定可能なパラメータで構成される数理モデルの提案を行った。先行研究 (K. Kuwana, G. Kushida, Y. Uchida, Combustion Science and Technology, 186, 4-5, pp.466-474 (2014)) では次の方程式が提案されていた。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + QYe^{-\beta/u}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v - Ye^{-\beta/u}, \end{cases}$$

ここで、原著で提案された変数を取り替えていることに注意されたい。前述の先行研究では、このモデルにおける様々なパラメータの値が提示されており、実験と数理モデルの対応関係について考えることができる。ただし、すす燃焼の実験では、特別な装置を用いて空気が燃焼部分に供給される。その流速が重要なコントロールパラメータとして重要視されている一方、先の数理モデルではその効果は特に含まれていない。そこで、実験との対応関係をさらに重要視するため、流速の効果を取り入れる。そのため、先行研究 (L. Kagan, G. Sivashinsky, Combustion Theory and Modelling, 12, 2, pp.269-281 (2008)) で提案されている数理モデルを参考にし、モデルの修正を行う。なお、山形大学の桑名氏との研究議論を通じて本研究の推進を行った。

４．研究成果

まず興奮系反応拡散方程式系を一般的に取り扱い、1 次元空間における進行波解の構成を行った。より正確に述べると、進行波解が満たすべき方程式を導出した後、拡散係数を０に近づけることによって自由境界問題を得る。この自由境界問題における進行波解を厳密に構成した。この進行波解は高次元のシリンダー領域においても方程式を満たすことから、3 節で述べた固有値問題を考えることができる。この固有値問題にはシリンダー領域による影響を表す波数が含まれている。進行波解は平行移動自由度を持つため、波数が 0 に対応する固有値問題は、0 を固有値に持つことが分かる。次に、任意に波数を固定して、拡散係数ｄが十分０に近い状況を考える。すると、0 に十分近い固有値が存在することが期待できる。この予想の基にして解析を行うと、次のような結果を得ることが分かる。

$$\lim_{d\to 0}\frac{\mu'}{< V', V'e^{-(c+\lambda_2)z/d} >} = -\frac{c_1'(0)}{(G_+(0) - G_-(0))} > 0$$

ここで、波数を独立変数とみなすことで固有値の微分を行っている。上記の式、左辺の分母は正の値であることに注意すれば、固有値

の導関数はdが0に近いとき真に正であることが分かる。よって、dが0に近いとき正の実固有値が存在することになり、高次元のシリンダー領域において進行波解は不安定であることが示された。つまり、興奮系反応拡散方程式系におけるパルス型の界面は、普遍的に不安定性を持つと言える。

すす燃焼に関して先行研究で提案されている数理モデルを見直し、次のモデルを提案した。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + Ye^{-\beta(1-u)/u}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \lambda\dfrac{\partial v}{\partial x} - Ye^{-\beta(1-u)/u}, \end{cases}$$

この数理モデルでは、桑名氏によって提案されたモデルにおける酸素濃度を表す変数に対して線形の移流項を加えている。一方、温度を表す変数に関しても同様に移流項を加えるべきであるが、今考えているLewis数に対しては小さな効果しか持たないことが分かった。そこで、温度に関する移流の項は削除することで、数理モデルの簡約化を行うことができた。温度に関しては発熱の効果が含まれる一方、放熱効果を現す項は含まれていない。よって、現れる時空パターンは遷移層型の界面であることが期待できる。したがって、これまで研究してきたパルス型の解に比べて解析が行いやすいであろう。現在提案した数理モデルの解析を行っている。

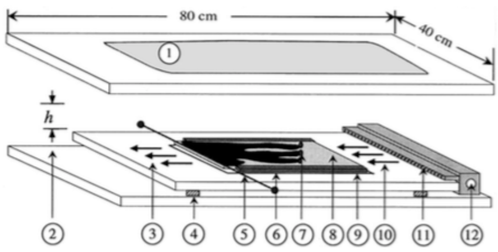

図１:すす燃焼の実験(イメージ図、O. Zik, E. Moses, Phys. Rev. E 60, pp.518–531 (1999)より転載)

数理モデルと実験の関係性をより詳しく調べるため、図1で表されるような実験系を構築した。今後は実験におけるパラメータを調節することで様々な時空パターンの出現を確認し、数理モデルとの対応を調べることが目標である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

① Kota Ikeda, Stability analysis for a planar traveling wave solution in an excitable system, Mathematical and numerical analysis for interface motion arising in nonlinear phenomena, RIMS Kokyuroku, Bessatsu, B35, 2012, pp. 125--140

〔学会発表〕（計　２件）

① Kota Ikeda, Stability analysis for a planar traveling wave solution in an excitable systems The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications Madrid, Spain, 2012年7月

② 池田 幸太, 縮約理論による反応拡散モデルの理論解析, 次世代人工透析手法の開発とそれに伴う数理モデルの構築, 九州大学, 2014年10月

６．研究組織

(1)研究代表者

池田　幸太（IKEDA, Kota）

明治大学・総合数理学部・講師

研究者番号：50553369