

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：34419

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740074

研究課題名(和文)閉路や木構造の存在を保証する不変量に関する研究

研究課題名(英文)A study on invariants that guarantee the existence of cycles and trees

研究代表者

山下 登茂紀(YAMASHITA, Tomoki)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：10410458

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文): 2008年の論文で小関氏と代表者は, ハミルトン閉路が存在するための「位数, 連結度, 独立数を含んだ次数和条件」に関して, 次数の和をとる頂点数を2頂点, 3頂点, 4頂点としたとき, その最良の下限は, 公差が「独立数-1」の等差数列をなすという規則性を発見した. この規則性は5頂点以上の次数和条件に関しても成立するのではないかと予想した. さらに, ハミルトン閉路の一般化である「指定された長さ以上の閉路」に対しても同様な規則性があるのではないかと予想した. これら2つの予想に関して, ハミルトン閉路に関する予想は正しいことを示し, 指定された長さ以上の閉路に関しては4頂点次数和条件に対して予想が正しいことを示した.

研究成果の概要(英文): In 2008, Ozeki and I discovered a rule of a degree sum condition with the order, the connectivity and the independence number of a graph for the existence of a hamiltonian cycle. The rule is that the lower bound on the degree condition is an arithmetic progression with common difference of "the independence number - 1". We proved that the rule holds for degree sum condition of two, three or four vertices, and conjectured the rule holds for degree sum condition of at least five vertices. Moreover, we posed a similar conjecture for the circumference. For these two conjectures, we settled the conjecture on hamiltonicity, and the conjecture on circumference for a degree sum condition of four vertices.

研究分野: グラフ理論

キーワード: ハミルトン閉路 次数和条件 全域木

1. 研究開始当初の背景

グラフとは、頂点集合と呼ばれる有限集合と辺集合と呼ばれる頂点集合の2元部分集合からなる組である。

コンピュータネットワークをグラフとみなすとき、ハミルトン閉路(すべての頂点を含む閉路)はネットワークにおける効率的な巡回診断経路とみなせる。また、全域木(すべての頂点を含む木)はネットワーク構築に重要な概念である。そのため、閉路や木構造に関する研究はグラフ理論において中心話題であり研究も盛んである。

あるグラフに対してハミルトン閉路や「ある種の性質を持った全域木」が存在するか否かを判定することは難しく、非自明な必要十分条件は知られていない。そのため、閉路および木構造が存在するための十分条件に関する研究が盛んに行われている。その条件として、位数(頂点数)、次数和、連結度、独立数の4つの不変量が重要であることが知られている。

(1) 2008年の論文で、小関健太氏(国立情報学研究所)と代表者は、ハミルトン閉路およびハミルトン閉路の一般化である「指定された頂点集合を含む閉路」が存在するための「位数、連結度、独立数を含んだ次数和条件」に関して、次数の和をとる頂点数を2頂点、3頂点、4頂点としたとき、その最良の下限は、公差が「独立数-1」の等差数列をなすという規則性を発見した。この規則性は5頂点以上の次数和条件に関しても成立するのではないかと予想した。さらに、ハミルトン閉路の一般化である「指定された長さ以上の閉路」に対しても同様な規則性があるのではないかと予想した。

(2) 2009-2010年度の科研費研究(若手研究(B))「閉路問題の次数和条件について」において、津垣正男氏(東京理科大学)と千葉周也氏(熊本大学)と藤沢潤(慶應義塾大学)と代表者は、2部グラフにおける「指定された長さ以上の閉路」が存在するための次数和条件を与えた。さらに、岡村治子氏(元・甲南大学)と代表者は、2部グラフにおける「指定された頂点集合を含む閉路」が存在するための次数和条件を与えた。これらの次数和条件には、一般のグラフにおいて見られたような類似性が見られなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、グラフが閉路や木構造を部分構造としてもつための条件はどのような不変量のどのような関係式が本質的であるかを決定することである。そのために、それらの条件間における規則性や類似性の存

在について調査を行う。

具体的には、「研究開始当初の背景」欄(1)で述べた規則性に関する予想が正しいかどうかを調査する。さらに、「研究開始当初の背景」欄(2)で述べた類似性に関して、ハミルトン道の一般化である「葉数が制限された全域木」やハミルトン連結の一般化である「指定された頂点集合を葉とする全域木」が存在するための次数和条件を調査する。これらの研究はハミルトン閉路問題にも深く関係している。

3. 研究の方法

「研究の目的」欄で述べた研究に対して、各研究内容に適した研究者数人と以下のようなグループを作り、科学研究に参画してもらった。

(1) 規則性に関する予想に関しては、津垣氏と千葉氏と「指定された長さ以上の閉路」に対して研究を行い、その後、千葉氏、古谷倫貴氏(北里大学)、小関氏、津垣氏と研究を行った。どちらの研究に関しても、まず最初に代表者が大まかな証明方針を考え、メールでやり取りして意見交換を繰り返し、ゼミ形式で議論を重ね、証明の詳細を詰めていった。

(2) 類似性に関する研究に関しては、研究を進めていく中で、「葉数が制限された全域木」や「指定された頂点集合を葉とする全域木」に関する結果は、「指定された辺集合の辺を含む複数の閉路」や「指定された頂点集合の頂点同士を結ぶ複数の道」に関する結果から導かれることが分かった。そこで、当初の研究計画を少し修正し、複数の閉路や複数の道の研究を行うことにした。「指定された辺集合の辺を含む複数の閉路」に関する研究を行う前に、千葉氏と「指定された頂点集合の頂点を含む複数の閉路」に関する研究を行った。また、津垣氏と松原良太氏(芝浦工業大学)と松村初氏(茨城大学)と、一般のグラフおよび2部グラフにおける「指定された頂点集合の頂点同士を結ぶ複数の道」に関する研究を行った。

4. 研究成果

(1) 規則性に関する予想に関して、次の2つの研究成果を得た。

「指定された長さ以上の閉路」が存在するための4頂点次数和条件に関する研究を、津垣氏と千葉氏と行い、論文としてまとめ投稿した。この次数和条件は、ハミルトン閉路の4頂点次数和条件の下限と一致する。ハミルトン閉路と同様の等差数列の規則性がある可能性が大きいことがわかった。

「ハミルトン閉路が存在するための次数和条件に関する予想」に関して、千葉氏、古谷氏、小関氏、津垣氏の協力を得て、5頂点以上すべての次数和条件に対して予想が正しいことを示し、論文としてまとめ投稿した。

これらの結果から、次数和条件に現れる不変量の関係式における規則性が明らかになった。さらに、「指定された頂点を通る閉路」に対しても同様な規則性があることが予想されるが、現在の証明はとても複雑で、この予想の解決は難しい状況にある。ハミルトン閉路における証明を精査して、規則性の原因解明とともに、簡略化することが今後の課題である。

(2) 類似性に関する研究に関して、次の2つの研究成果を得た。

指定された頂点集合の頂点をちょうど1頂点ずつ含む閉路でグラフを分割するための次数和条件に関する研究を千葉氏と行い、論文としてまとめ投稿した。この研究過程において、「閉路が存在するために必要な次数和条件」と「閉路が指定された頂点を含むために必要な次数和条件」を明確にすることができた。

一般のグラフおよび2部グラフにおける指定された頂点集合の頂点同士を結ぶ複数の道でグラフを分割するための次数和条件に関する研究を、津垣氏と松原氏と松村氏と行い、論文としてまとめ投稿した。これらの証明において、「指定された辺を通るハミルトン閉路が存在するための次数和条件に関する定理」を用いている。一般のグラフとは異なり、2部グラフに対しては、この定理を使うと最良の次数和条件を得ることはできないことがわかった。

(3) 上記の(2)の研究を行う際、定理間の関係性に注目することで、新しい結果を得た。そこで、定理の関係性について以下の研究を行った。

「葉数が制限された全域木が存在するための次数和条件に関する定理」が、「指定された長さ以上の閉路が存在するための次数和条件に関する定理」や「指定された個数の閉路が存在するための次数和条件に関する定理」の系として導くことができることを示し、論文としてまとめ投稿した。さらに、「指定された2つの頂点集合を結ぶ点素な複数の道が存在するための次数和条件に関する定理」が、「有向グラフの有向ハミルトン閉路が存在するための次数和条件に関する定理」から導かれることを示した。今後はこのような関係性に関する研究が閉路研究の中心話題となると考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8件)

Mikio Kano, K.Ozeki, K.Suzuki, M.Tsugaki and T.Yamashita, Spanning k -trees of Bipartite Graphs, Electron. J. Combin. 22(1) (2015) P1.13, 10 pages, 査読有.

S.Chiba, M.Tsugaki and T.Yamashita, Degree sum conditions for the circumference of 4-connected graphs, Discrete Math. 333 (2014) 66-83, 査読有.

R.Matsubara, M.Tsugaki and T.Yamashita, Closure and spanning k -trees, Graphs Combin. 30 (2014) 957-962, 査読有.

H.Matsuda, K.Ozeki and T.Yamashita, Spanning trees with a bounded number of branch vertices in a claw-free graph, Graphs Combin. 30 (2014) 429-437, 査読有.

Mikio Kano, T.Yamashita and Z.Yan, Spanning Caterpillars Having at Most k Leaves, Computational Geometry and Graphs (Lecture Notes in Computer Science) 8296 (2013) 95-100, 査読有.

H.Okamura and T.Yamashita, Degree sum conditions for cyclability in bipartite graphs, Graphs Combin. 29 (2013) 1077-1085, 査読有.

K.Ozeki and T.Yamashita, Length of Longest Cycles in a Graph Whose Relative Length is at Least Two, Graphs Combin. 28 (2012) 859-868, 査読有.

S.Chiba, J.Fujisawa, M.Tsugaki and T.Yamashita, Long cycles in unbalanced bipartite graphs, Discrete Math. 312 (2012) 1857-1862, 査読有.

[学会発表](計 5件)

山下 登茂紀,閉路や木が存在するための次数和条件,平成27年度 RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」,2015年7月10日,京都大学数理解析研究所(京都府京都市).

千葉 周也,古谷 倫貴,小関 健太,津垣 正男,山下 登茂紀,ハミルトン閉路が存在するための次数和条件,離散数学とそ

の応用研究集会, 2014 年 8 月 21 日, 新潟総合テレビ ゆめディア (新潟県新潟市) .

山下 登茂紀, ハミルトン閉路が存在するための次数和条件, 田澤新成先生ご退職記念関西グラフ理論研究集会, 2014 年 2 月 21 日, 近畿大学 (大阪府東大阪市) .

山下 登茂紀, グラフの不変量と閉路の存在について, 日本応用数理学会 2012 年度年会, 2012 年 8 月 29 日, 稚内全日空ホテル (北海道稚内市) .

S.Chiba, M.Tsugaki and T.Yamashita, Degree sum conditions concerning the connectivity and the independence number, Cycles in Graphs, 2012 年 6 月 1 日, Vanderbilt University (Nashville, United States of America) .

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

山下 登茂紀 (YAMASHITA Tomoki)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 10410458

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし