

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 22 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740079

研究課題名(和文) グロス・ピタエフスキー方程式のダイナミクスとその周辺

研究課題名(英文) Dynamics of the Gross-Pitaevskii equation and related problems

## 研究代表者

福泉 麗佳 (Fukuizumi, Reika)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：00374182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：グロス・ピタエフスキー方程式に時間のみに依存するホワイトノイズが摂動に加わった方程式について、安定な渦に対するノイズの影響を変調パラメータ解析により計算し、変調パラメータがどのくらい長い間意味を持つか、ノイズの影響を受けながらも渦の初期状態がどのくらいの間保たれるのかを評価した。また、半古典近似の考え方をを用いて、周期的光学格子にトラップされているボース・アインシュタイン波動関数の離散シュレディンガー方程式による近似を正当化した。離散シュレディンガー方程式による近似を応用して、粒子間相互作用が斥力の場合でも、波動関数の局所化が現れる場合があることを数学的に証明した。

研究成果の概要(英文)：The Gross-Pitaevskii equation perturbed by (only temporal) white noise is considered. In particular, we analyzed the modulation parameters in a stable vortex solution and we estimated how long those modulation parameters can have a meaning compared to the noise, that is, how long the stable vortex input initially can persist its form compared to the strength of the noise. On the other hand, with the use of semi-classical technique, we justified the approximation of the wave function of the Gross-Pitaevskii equation trapped in a periodic potential via the solution of the associated discrete nonlinear Schroedinger equation. As an application of this approximation, we showed the localization of the wave function even if defocusing nonlinearities are considered.

研究分野：解析学

キーワード：偏微分方程式論 確率論

### 1. 研究開始当初の背景

Bose-Einstein 凝縮を記述する基本的なモデル方程式、Gross-Pitaevskii 方程式とは調和ポテンシャルを伴う非線形 Schrödinger 方程式である。実験による Bose-Einstein 凝縮の実現により、Gross-Pitaevskii 方程式の研究は勢いを増し、観測対象への興味に応じて様々な改良型が提案され実験が行われている。凝縮体を捕獲することにより、巨視的量子コヒーレンスや非平衡緩和過程を見ることを可能にするという点で物理的に極めて興味深く重要な研究対象である。研究開始当初は特に、凝縮体を捕まえるためのレーザーによるトラップを行う際に、レーザー振動数が時間に依存して微小に変動する状況が起こり、より現実に近いモデルとしてその変動を調和ポテンシャルのゆらぎとして考慮すべきという物理での提案があった。

### 2. 研究の目的

Gross-Pitaevskii 方程式は磁場や光学トラップ、自己相互作用を考慮した非線形 Schrödinger 方程式であるが、非線形光学においても実用的なモデルとして現れ大変重要である。本研究では Gross-Pitaevskii 方程式を基とする代表的な Bose-Einstein 凝縮のモデルの本質的なダイナミクスを数学的に解明する。特に定在波、渦などの特殊解の性質を理論的に証明し、物理として期待される現象の数学的実証を行うのが目的である。

完全可積分な方程式では、孤立波の重ね合わせと見なせる多重ソリトン解が存在し、それらは逆散乱法で具体的に表現でき解析可能である。しかし、Gross-Pitaevskii 方程式のように、可積分な方程式に摂動が加わったものには、もはや可積分性はないため、逆散乱法のような従来の手法は適用できない。そこで、よりロバストな関数解析的手法を応用して、特殊解の挙動を解析しようというのが、まず一つのアイデアかつ目的である。

さらに、当研究で扱うモデルの一つに、ノイズで摂動された Gross-Pitaevskii 方程式があるが、その主要線形部分である Schrödinger 方程式は熱方程式と比較して積分核に平滑化効果も十分になく、また必ず非線形項を伴うため、解の Feynman-Kac 表示など基本的な確率論的手法を通して解析出来る対象ではなく、そうなるとう偏微分方程式論的手法をいかに適用していくかが問題となる。そのような見地から、偏微分方程式論的手法により、確率偏微分方程式の研究方法を発展させていこうという目的もある。

### 3. 研究の方法

海外からの理論数学の研究者(研究協力者)を訪問・招待し議論する。同時に、モデル方

程式の意味・解の性質として何を予想するかを物理学の研究者と議論し、数学的に証明する際のヒントとする。数値シミュレーションによる観察によって現象を予想、数値シミュレーションの数学的証明を行う。

### 4. 研究成果

(1) Gross-Pitaevskii 方程式に対する任意の巻き数の渦点は渦と同じ構造を持つ摂動に関して軌道安定である。その安定な渦点を初期データとしたとき、確率的な摂動を持つ Gross-Pitaevskii 方程式の解は一般的にはノイズの効果で不安定となる。すなわち、初期に与えた形は崩れてしまう。そこで、発表論文[1]の研究では、ノイズの大きさと比較して、どの程度の時間まで渦の形を保つことができるのかを、安定な渦点のまわりにおける線形化作用素からの情報と方程式の保存量を組み合わせることによって理論的に証明した。方程式の線形部分の発展作用素の積分核表示が具体的であることが証明のポイントとなっており、その表示の発見も研究成果の一つである。また、数値計算により渦を初期データに持つ解の長時間挙動を観察し、周期的な挙動を確認、さらには理論的に証明をした渦の壊れ時間評価が最適であることの裏づけを行った。

(2) Gross-Pitaevskii 方程式は、一般的に Bose-Einstein 凝縮体をトラップするためのポテンシャル項を伴う。論文[2]では、周期的なポテンシャルによって、各格子点に凝縮体をトラップする状況を考え、凝縮体がどのような振る舞いをするのかを半古典近似により考察した。メキシカンハット型のような2つの同レベルな最小値を持つような形のポテンシャルの場合、初め2つのポテンシャルに対称にトラップされていた波動関数が、非線形効果を大きくしていくと、片方のポテンシャル内に偏ってトラップされるという対称性の崩れが起こることは既に知られている。

今回は無限に同じようなポテンシャルが、但し正則に周期的に、並ぶ場合にも、非線形効果を大きくすることにより、一つのポテンシャルに波動関数が集中するということを示した。

具体的には、周期的なポテンシャルを伴う Gross-Pitaevskii 方程式の解がポテンシャルの乗っている格子点に対応した離散化 Schrödinger 方程式の解により近似できるということを示し、離散 Schrödinger 方程式において、非線形効果を大きくすることで解が一点に集中するということを示すというアイデアを使った。

(3) 有界領域上での非線形 Schrödinger 方程式を考え ground state と呼ばれる最小エネルギー一定常解だけでなく、高エネルギーを持つ定常解 excited states の安定性を証明

した。但し、有界領域という制限が安定な波を生成しやすいこと、また、Dirichlet ラプラス作用素の各固有関数の持つゼロ点の場所とそれに関する対称性が非線形の時間発展により保たれる状況下での安定性である。Excited states の安定性は今までにほとんど知られておらず、今回の結果が何らかの手がかりになることを期待する。論文中で扱ったのは、空間次元の話であり、この場合は、具体的に解の形がわかり、簡単に計算が出来ることがポイントとなっている(実は Excited states は ground state の切り貼りで表現できる)。しかしながら、この発想を用いて高次元の話への拡張も期待ができ、今後の課題である。

(4) 論文[1]の特殊解(渦)の振る舞いについて研究を行う前に、ノイズを伴う Gross-Pitaevskii 方程式の初期値問題について調べる必要がある。初期値問題が適切に解けるということを調べたのが、論文[4]である。時間にのみ依存するホワイトノイズを伴う線形 Schrödinger 方程式の基本解を Fujiwara, Yajima の方法で構成し、その性質を用いてランダムな Strichartz 評価を導出した。基本解の構成の仕方は、Albeverio らによる確率論的な方法など、今までに様々な手法が知られているが、確率項付きの方程式に対して、あえて道ごとに deterministic な手法を用いた。その方法を適用する際に、あるゲージ変換を行えば方程式中のホワイトノイズを単なるランダムな磁場ポテンシャルに変換できるという事実を発見したことが勝因といえる。

また、Strichartz 評価の証明の応用として、解のブラウン運動に関する連続性を示した。それにより、一般的なレーザー振動数の変化(時間に関する再帰的定常過程に従う場合など)を考慮したモデルの拡散近似を証明することができた。拡散近似の数学による正当化は大変重要である。例えば、Garnier, Abdullaev, Baizakov らの凝縮体の爆発時間の解析研究にみられるように、この近似を用いることで、拡散過程から得られる詳細な情報を、任意のランダムな定常モデルに対し、近似的に用いることが可能になる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

[1] A. de Bouard, R. Fukuizumi and R. Ponce, "Vortex solutions in Bose-Einstein condensation under a trapping potential varying randomly in time," To appear in Discrete Contin. Dynam.

System. B. 査読有

[2] R. Fukuizumi and A. Sacchetti, "Stationary states for nonlinear Schrödinger equations with periodic potentials," J. Stat. Phys. 査読有 156 (2014) 707-738

[3] 福泉麗佳, "ランダムな外力を伴うグロス・ピタエフスキー方程式," 数理解析研究所講究録, RIMS 共同研究「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」査読無, 1823 巻, (2013) 158-171

[4] R. Fukuizumi, F. Hadj Selem and H. Kikuchi, "Stationary problem related to nonlinear Schrödinger equations on the unit ball," Nonlinearity 査読有 25 (2012) 2271-2301

[5] A. de Bouard and R. Fukuizumi, "Representation formula for stochastic Schrödinger evolution equations and applications," Nonlinearity 査読有 25 (2012) 2993-3022

〔学会発表〕(計 6 件)

[1] 福泉麗佳, "Stochastic GP 方程式における渦解," 研究集会「量子渦と非線形波動」東京理科大学 2015 年 1 月 26 日

[2] 福泉麗佳, "Vortex solutions in Bose-Einstein Condensation" 研究集会「確率解析とその周辺」東北大学 2014 年 10 月 16 日

[3] 福泉麗佳, "Vortex solutions in BEC under a trapping potential varying randomly in time" Politecnico di Torino, イタリア, 2014 年 10 月 1 日

[4] 福泉麗佳, "非線形 Schrödinger 方程式 - 定在波とノイズ" RIMS 共同研究「偏微分方程式に付随する確率論的問題」京都大学数理解析研究所 2014 年 9 月 16 日

[5] 福泉麗佳, "Gross-Pitaevskii equation with noise" 研究集会「Analytical and Numerical Advances around Schrödinger equations」Toulouse 第 3 大学, フランス 2012 年 10 月 24 日

[6]福泉麗佳, “ Derivation of Bose-Hubbard model -Approximation by DNLS ”  
研究集会「光ファイバーとそれに関連する非線形偏微分方程式の研究」  
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所  
2012年8月23日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

<http://math.is.tohoku.ac.jp/~fukuizumi>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

福泉 麗佳 (FUKUIZUMI, REIKA)  
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：00374182