2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４００８０

研究課題名（和文）熱核の漸近評価の確率論的導出および凸不等式の研究

研究課題名（英文）Probabilistic derivation of asymptotic estimates of heat kernels and study of convex inequalities

研究代表者
針谷　祐（Hariya, Yuu）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：２０４０４０３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：1. 統計力学，とくに界面モデルの解析で重要なBrascamp-Lieb不等式について，確率解析を用いた簡明な証明を与えるとともに，その手法を応用して誤差評価および非凸なポテンシャルをもつ場合への拡張を導いた.
2. ベッセル過程の到達時刻がもつ末尾確率の漸近評価の主要項を，確率測度の列の弱収束に基づく直接的な手法により再現した．また，誤差項の精密な漸近評価を導いた.
3. 特異なポテンシャルをもつファインマン・カッツ型の期待値が発散する十分条件を，ブラウン運動の場合，対称安定過程の場合，ブラウン運動の場合であって半空間の境界に特異ポテンシャルをもつ場合，の三つの場合に明示的に与えた.

研究成果の概要（英文）：1. The Brascamp-Lieb inequality has importance in statistical mechanics, such as in the analysis of interface models. We give a simple proof of the inequality based on stochastic analysis; as an application of our method, also derived are error estimates of the inequality and its extensions to nonconvex potentials.
2. We recover the principle terms in asymptotic estimates for tail probabilities of first hitting times of Bessel process in a relatively simple manner based on the weak convergence of probability measures; sharp asymptotics of remainder terms are also derived.
3. We clarify sufficient conditions for expectations of the Feynman-Kac type with singular potentials to diverge in the following three cases: Brownian motion, symmetric stable process, and Brownian motion in the half-space with singular potentials on the boundary.

研究分野： 確率論

キーワード： 確率解析

１．研究開始当初の背景

(1) P. Baras と J.A. Goldstein は参考文献[1]の論文において，ユークリッドノルムの負べきにより与えられる特異ポテンシャルをもつ熱方程式に対する解の存在・非存在(爆発)を考察した．また，石毛，石渡両氏は[2]において，方程式の定義される半空間領域の内部では通常の熱方程式に従い，領域の境界上で負べきの特異ポテンシャル項をもつ方程式に対して同様の問題を議論した．通常の熱方程式の解は，いわゆる Feynman-Kac の公式により Brown 運動の期待値を用いた表示をもつ(下記「研究の目的」欄参照)．また，[2]で扱われた，半空間の境界上でポテンシャル項をもつ熱方程式に対しても Feynman-Kac 型の解の表示が成立することを前年度までの研究で筆者は見出していた．従って，それらの確率論的表示を用いて対応する熱方程式の解の存在・非存在を議論し，また Brown 運動を他の確率過程に置き換えて同様の考察を行うことは自然な問題意識であると思われる．

(2) 統計力学，とくに∇φ界面モデルの解析で重要な道具の一つに，凸不等式の一種である Brascamp-Lieb のモーメント不等式がある．この不等式を用いることによって，界面モデルが真に凸のポテンシャルをもつ場合に，対応する有限体積の Gibbs 測度の族の緊密性や，境界条件に勾配を与えたときの界面の表面張力が勾配に関して真に凸の関数となること等が導かれる．後者の真の凸性は，スケール変換を施した界面が従う大偏差原理の証明に重要である．近年，ポテンシャルが凸とは限らない場合に界面モデルの解析が盛んに行われるようになった(例えば[3], [4])．そのため，Brascamp-Lieb の不等式についてその成立のためのポテンシャルの条件を精査し，また，より詳細な評価を導くことは意義あることと思われる．

２．研究の目的

確率論や偏微分方程式論における主要な研究対象の一つに，物体内における熱の伝導を記述する熱方程式がある．この方程式の解は，熱核と呼ばれる積分核に初期時刻での熱の分布を表す関数を乗じたものの空間変数に関する積分形で表現される．従って，熱核の性質を詳しく知ることは，対応する方程式の解の性質を調べる上で重要となる．熱核は，存在するならば Feynman-Kac の公式により Brown 運動の汎関数の期待値を用いた確率論的表示をもつ．本研究の主たる目的は，熱核の長時間挙動に対し，その主要項の導出と剰余項の漸近評価を熱核の Feynman-Kac 表現に基づく確率論的手法により行うことである．あわせて，Brascamp-Lieb 型の凸不等式の拡張を行うことも目的とする．なお Brown 運動は，その空間次元が 1 の場合，実軸上の∇φ界面モデルであってポテンシャルが 2 次関数により与えられるものの連続極限とみなすことができる．

３．研究の方法

(1) 上記「研究開始当初の背景」欄に述べた Brascamp-Lieb のモーメント不等式について，Skorokhod の埋め込みと確率解析を組み合わせたその簡明な証明を与えた(下記「主な発表論文等」欄の雑誌論文②)．Skorokhod の埋め込みとは，与えられた 1 次元確率分布を 1 次元 Brown 運動への停止時刻の代入により実現するものであり，1960 年代初めの A.V. Skorokhod による問題の提唱までさかのぼることができる．それ以来様々な埋め込みの構成がなされており，本研究では Bass による埋め込みの実現法[5]を用いた．

(2) 濱名，松本両氏により近年得られた Bessel 過程の到達時刻に関する末尾確率の漸近評価[6]について，確率測度の列の弱収束に基づくより直接的な手法を用いてその主要項を再現するとともに，同様の方法によって Bessel 過程がその最小値を達成する時刻の末尾確率や関連する期待値の漸近挙動を導出した．また，濱名-松本[6]とは異なる議論により誤差項の具体的な漸近挙動を明らかにした(下記の雑誌論文①)．

(3) Baras-Goldstein の結果[1]を動機に，長谷川氏との共同研究として，特異ポテンシャルをもつ Feynman-Kac 型の期待値が発散する十分条件を，(a) Brown 運動の場合，(b) 対称安定過程の場合，(c) Brown 運動の場合であって半空間において境界条件に特異ポテンシャルをもつ場合，の三つの場合に明示的に与えた[7]．Feynman-Kac の公式により，これらの期待値の発散は，それぞれに対応する偏微分方程式の解の爆発に相当する．

４．研究成果

上記「研究の方法」欄のそれぞれの項目に対応する研究成果は以下の通りとなる：

(1) ポテンシャルが凸のとき，Bass による埋め込みによって構成される停止時刻は有界となることが証明できる．その有界性と劣マルチンゲールに対する任意抽出定理を用いることにより Brascamp-Lieb の不等式の簡明な証明を得た．また，確率解析における伊藤-田中の公式を用いることにより，この手法の応用として分散による誤差評価を得ることができた．この結果は筆者の知る限りこれまで発見されなかった新たなタイプの不等式であり，Brascamp と Lieb によるオリジナルの証明法も含めて，従来の手法ではこのような誤差評価を得ることは困難であると考えられる．また，本手法のもう一つの応用として，空間次元が 1 の場合に，ある種の非凸なポテンシャルをもつ場合への Brascamp-Lieb の不等式の拡張を導いた．

(2) Bessel 過程はその次元が正の整数の場合，対応する空間次元の Brown 運動の動径として実現される．それゆえ Bessel 過程は確率論において Brown 運動と並ぶ基本的かつ重要な研究対象である．本項目の研究成果は，多次元 Brown 運動の非極コンパクト集合への到達時刻の末尾分布がもつ漸近挙動を調べた M. van den Berg の 2007 年の結果[8]を，コンパクト集合が球であって次元が非整数の場合に補完する．なお Bessel 過程の次元が正の整数のとき，本研究は，対応する次元のユークリッド空間において原点中心の球を除いた領域上の Dirichlet 境界条件付き(つまり境界上で絶対零度とする)熱方程式がもつ熱核の，空間変数に関する積分量の漸近挙動を詳細に調べることに相当するものである．

(3) 本項目の研究成果は，対応する偏微分方程式(上記の(b)の場合，通常の Laplace 作用素は分数べきのものとなる)の解の存在と非存在を分ける臨界定数の評価を与える．Baras-Goldstein [1]，そして石毛-石渡[2]の研究結果より，臨界定数は関連する Hardy の不等式に現れる最良定数に一致することが推測される．本研究では，確率論的にこの最良定数を再現するには至らなかったものの，上記の(a)，(b)，(c)いずれの場合においても，得られた評価は空間の次元を無限大とする際の漸近挙動が最良定数のそれと一致するものである．この漸近的に最良の定数は，Baras-Goldstein の評価法を改良し，また(b)と(c)のそれぞれの場合への拡張を行うことにより得られる．なおかつ Baras-Goldstein の結果と同様に，ポテンシャルとしてべき乗型のものを含むより一般的な枠組みで非可積分性，すなわち解の爆発を論じることが可能となった．あわせて，(c)の場合の解の Feynman-Kac 表現について，その時間パラメータに関する Laplace 変換が，(b)における指数 1 の対称安定過程の場合に対応する Feynman-Kac 型表現をもつことを明らかにした．本研究成果は学術誌に投稿中であり，その詳細は下記参考文献[7]内に記載の URL において閲覧可能である．

<参考文献>

[1] P. Baras and J.A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc. vol.284 (1984), 121-139.
[2] K. Ishige, M. Ishiwata, Heat equation with a singular potential on the boundary and the Kato inequality, J. Anal. Math. vol.118 (2012), 161-176.
[3] M. Biskup, R. Kotecký, Phase coexistence of gradient Gibbs states, Probab. Theory Relat. Fields vol.139 (2007), 1-39.
[4] C. Cotar, J.-D. Deuschel, Decay of covariances, uniqueness of ergodic component and scaling limit for a class of ∇φ- systems with non-convex potential, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. vol.48 (2012), 819-853.
[5] R.F. Bass, Skorokhod imbedding via stochastic integrals, in Séminaire de Probabilités, XVII, 221-224, Lect. Notes in Math. 986, Springer, Berlin, 1983.
[6] Y. Hamana, H. Matsumoto, Asymptotics of the probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, Electron. Commun. Probab. vol.19 (2014), no.5, 1-5.
[7] Y. Hariya, K. Hasegawa, On divergence of expectations of the Feynman-Kac type with singular potentials, preprint, 2014. http://arxiv.org/abs/1409.6951v1
[8] M. van den Berg, Heat flow, Brownian motion and Newtonian capacity, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. vol.43 (2007), 193-214.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ２ 件）

① <u>Yuu Hariya</u>, Some asymptotic formulae for Bessel process, to appear in Markov Processes and Related Fields, 査読有

② <u>Yuu Hariya</u>, A connection of the Brascamp-Lieb inequality with Skorokhod embedding, Electronic Communications in Probability, vol.19 (2014), no.61, pp.1-12, 査読有
DOI: 10.1214/ECP.v19-3025

〔学会発表〕（計 ４ 件）

①<u>針谷 祐</u>，特異ポテンシャルをもつ Feynman-Kac 型期待値の発散について，偏微分方程式に付随する確率論的問題，京都大学，2014 年 9 月 16 日

② <u>針谷 祐</u>, A connection of the Brascamp-Lieb inequality with Skorokhod embedding, 新潟確率論ワークショップ，新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」, 2013 年 12 月 5 日

③ <u>Yuu Hariya</u>, A connection of the Brascamp-Lieb inequality with Skorokhod embedding, 復旦大学確率論セミナー，上海，2013 年 10 月 18 日

④<u>針谷 祐</u>，境界に特異ポテンシャルをもつ熱方程式に対する解の爆発の確率論的導出，平成 24 年度日本数学会東北支部会，東北大学大学院理学研究科，2013 年 2 月 16 日

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　針谷　祐（HARIYA, Yuu）
　東北大学・大学院理学研究科・准教授
　研究者番号：20404030

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：