

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2013

課題番号：24740084

研究課題名(和文) 曲がった時空上の場の量子論のスペクトル解析とその応用

研究課題名(英文) Spectral analysis of quantum field theory on curved space time and its application

研究代表者

鈴木 章斗 (SUZUKI, Akito)

信州大学・工学部・助教

研究者番号：70585611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：曲がった時空における粒子の系のスペクトルの性質が解析された。特に、離散化された空間をグラフと考え、多粒子系のスペクトルと粒子が運動する(配位空間としての)グラフの構造との関係が研究された。粒子の(エネルギーを記述する)ハミルトニアンに対する零(エネルギーに対応する)固有空間やウィッテン指数があるグラフの変形に対して不変であることが示された。また、これと同じ変形をしても、もしスペクトルギャップがあれば、そのギャップが開いたままであることも示された。

研究成果の概要(英文)：The spectral properties of particle systems on curved spacetime were analyzed. Particularly, discretized spaces are viewed as graphs, and the relation between the spectra of many-particle systems and the structure of graphs where the particles move was studied. The zero eigenspace and the Witten index of the particle Hamiltonians were proved to be invariant under a graph transformation. The spectral gap was shown to remain open under the same graph transformation as above.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・関数解析

キーワード：場の量子論 スペクトル グラフ

## 1. 研究開始当初の背景

場の量子論は、素粒子物理学における標準模型や物性物理学における多体の電子論など物理学の理論としては、非常な成功を収めた理論である。ところが、相対論的な量子電磁力学が未だ厳密に構成されていないなど、数学的な立場では理論的には未解決な部分も少なくない。一方、非相対論的な量子電磁力学など、厳密に定義可能な場の量子論の模型もいくつかあって、そのような模型の解析は、関数解析、表現論、作用素論、作用素環論、確率論など多くの数学の分野と密接に関連しながら、いまなお発展・深化し続けている。

上に述べたような厳密に定義可能な模型の研究のひとつとして、曲がった時空上の場の量子論の模型(Quantum field theory on curved spacetime)に関する研究がある。これは、時空の構造(ただし、重力は量子化しないで古典的に扱う)を場の量子論の模型に持ち込んだ理論である。このような理論では、時空の幾何学的性質によって引き起こされる現象、特に通常の場合の量子論(平坦な時空である Minkowski 時空に対応)では起きないような現象に興味がある。空間の幾何学的構造とスペクトル(粒子のエネルギーに対応)の関係に関する多くの先行研究によって、粒子が運動する空間の幾何がスペクトルに影響を及ぼすことはよく知られている。このような場合は、粒子の集団としての振舞いを記述する場の量子論の模型のスペクトルにも、その幾何学的影響が現れることはいうまでもない。一方、各々の粒子のスペクトルには現れないほどに繊細な幾何学的効果であっても、粒子が無数に集まることで、その効果が現れてくるような場合がある。このような繊細な幾何学的効果の存在は、Gerard-Hiroshima-Panati-Suzuki(本研究代表者)による一連の研究によって明らかになっている。実際、空間遠方で平坦な時空に近づくような時空における場の量子論の模型では、粒子ひとつひとつのスペクトルは等しくても、その近づき方によって、系の基底状態が存在する場合と非存在になる場合があることが示された。このような繊細な効果を見るためには、関数解析や確率論などの精密な数学の理論が必要となるため、そのような数学の応用の舞台となり、数学自体の発展に大きく寄与することが期待される。

幾何学的構造を離散化したものとして、頂点と辺の集合からなるグラフ上を粒子の運動する空間として考えることができる。これは、上の幾何学的構造とスペクトルの関係を調べる研究のアナロジーとして、理論的な興味の対象になりうる。さらに、この場合は、頂点を原子やイオンと捉え、辺を化学結合とみなすことで、物質中の電子の運動と考えることも可能である。従って、上で述べた幾何学的構造とスペクトルの関係を調べる研究

の離散化として、グラフの構造とスペクトルの関係を調べることは、単なる理論的なアナロジーとしての興味以上に、物質中の電子の性質を理解するという応用上の意義をもつ。さらに、ナノテクノロジーの進歩によって、格子(これもグラフと考えることができる)上を運動する粒子の模型が実現されつつある近年、そのような粒子のスペクトル解析は数学的研究対象としても注目を集めているし、そのような粒子の集団としての振舞いを記述する場の量子論もまた、数学的な興味がつきない。特に、ボース・アインシュタイン凝縮などはそのような理論の範疇にある研究対象のひとつである。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述したような幾何(その離散化としてのグラフの構造も含む)的效果が現れる機構を関数解析などの数学的な立場から厳密に理解することである。また、場の量子論の立場から粒子の集団としての性質を調べることも目的のひとつである。

## 3. 研究の方法

本研究では、さまざまな空間の幾何学的構造を考え、その上で運動する粒子の性質、特にスペクトルに関する性質を、関数解析や作用素論を用いて数学的に厳密に研究した。また、粒子の集団としての性質を調べるためには、1粒子のスペクトルを明らかにすることが第1歩となる。そこで、幾何学的効果が1粒子のスペクトルにどのような変化を与えるかを詳しく調べた。

## 4. 研究成果

### (1) 空間を離散化した場合

グラフに付随する概念として、隣接作用素が定義できることが知られている。グラフの隣接作用素は、そのグラフ上を運動する粒子のハミルトニアン(エネルギーに対応する作用素)とみなされ、そのスペクトルは、粒子の運動エネルギーに対応する。グラフの隣接作用素のスペクトルをグラフの変形との関係から研究した。ある種の変形では、以下に述べる成果を得た。

#### 零固有空間の次元

零固有空間は、粒子が零エネルギーをもつような粒子の確率分布を記述する固有状態からなる。有限グラフについては既に知られていた隣接作用素の零固有空間の次元を不変にするグラフの変形が、無限グラフにおいても零固有空間の次元を不変に保つことを示した。また、零固有状態における粒子の分布を調べた。

#### ウィッテン指数

グラフが隣接する2頂点が互いに異なる色になるように、2色で塗り分けられるとき、2部グラフであるという。上述の変形は、2部グラフの構造を保つことがわかる。また、2部グラフ上を運動する粒子のハミルトニアンは、超対称性をもつことが知られている。つまり、この変形は超対称性を保つ変形と考えることができる。ハミルトニアンが超対称性をもつ場合、ウィッテン指数が定義できるが、この変形によってウィッテン指数も不変であることが示された。実は、このような変形では、グラフの頂点の数を減らしていくことができるが、不変性を利用して頂点の数を減らしていくと、ウィッテン指数が容易に計算できる場合がある。この結果は超対称性をもつ1次元の連続的な模型において知られているウィッテン指数の計算方法のグラフ版と考えることもできる。

### スペクトルギャップ

の零固有空間の次元やウィッテン指数を不変に保つ変形は、零エネルギー付近のスペクトルギャップを保つことも示された。スペクトルギャップは、粒子がそのようなエネルギーをもつことができない領域があることを示している。グラフの隣接作用素のスペクトルは、1頂点から出ている辺の数の最大値を  $d$  とするとき、 $-d$  から  $+d$  までの範囲に分布することが知られている(ただし、ループはないものとする)。しかし、その範囲内にどのように分布するかはグラフの構造によって決まり、一般にはよくわからない場合も多い。例えば、グラフに周期性や対称性があるような場合は、具体的にその分布が計算可能であるが、周期性や対称性がない場合は分布を決定するのは難しい。今の結果を応用すると、周期性や対称性をもたないグラフであっても、少なくとも零付近のスペクトルについては決定できる場合がある。例えば、1次元の格子の頂点に長さ有限のパス(一直線に並んだ頂点からなるグラフで、その頂点の個数を長さと考え)を無限に付加していくような変形を考える。そのような変形のできたグラフは周期性や対称性をもつとは限らないが、もし、パスを付加されていない頂点たちが、高々有限の長さのパスだけからなるような場合はスペクトルギャップをもつことがわかる。このような判定法は計算不要でグラフの「見た目」だけでわかるので、とても便利である。また、周期的な場合は計算可能と述べたが、原理的に計算可能であっても、その計算が容易とは限らない。数値計算に頼るほかないような場合も少なくない。上述の結果を周期的な場合に应用すると、零付近のギャップが存在するための必要十分条件が導かれる。詳細は割愛するが、これも、ある程度「見た目」で判定できる条件である。これを応用すると、例えば、上で例に挙げた1次元格子にパスを付加していくような変形で、パスを周期的に付加するような場合では、

零付近に必ずギャップが現れることがかなり簡単にわかる。一方、2次元以上の場合に应用すれば、「見た目」で零付近のギャップの有無が判定可能である。

からの変形とは別の変形に対しては、真性スペクトルのルベグ測度が増加したり、次元に依存してギャップが現れたり消えたりするような現象も発見された。これは、Fidaleo による方法を、2次元以上の格子に应用して得られた。Fedaleo によると、このような変形ではスペクトルは変化しても、状態密度は変化しない。このことが今回得られた例でも同様であることが示されると、ボース・アインシュタイン凝縮のような粒子の集団的振る舞いとの関係が明らかになることが期待される。

### (2) 連続的な場合

多粒子の振る舞いを、連続模型で調べた。これは佐々木浩宣氏(千葉大)と清水翔之氏(東工大)との共同研究である。

Ginibre-Veloらの研究によると、多体系の古典極限において、量子場の方程式の古典解付近の量子揺らぎは、古典解から決定される時間依存ポテンシャルをもつシュレディンガー作用素と積分核作用素の相互作用によって記述される。このようにして得られる時間依存シュレディンガー作用素に関して、適当な条件の下、以下に述べる基本的な事実を証明することができた。

古典解が存在する範囲において、自己共役になり、古典解のエネルギーが負であれば上述の作用素は基底状態をもつ。

負の固有値の個数が有限であるための条件と、無限個になる条件を導いた。また、時間無限大で負の固有値が消失するような条件も導いた。今後、幾何学的構造との関係を調べるのが課題である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Akito Suzuki, Spectrum of the Laplacian on a covering graph with pendant edges I: The one-dimensional lattice and beyond, Linear Algebra Appl., **439**, 3464 - 3489, 2013. (査読有)

〔学会発表〕(計 3 件)

鈴木 章斗, 周期的にペンダントを付加した  $d$  次元格子のスペクトル, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学。

鈴木 章斗, 周期的にペンダント頂点を付加した1次元格子上のラプラシアンの特値解析, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学.

鈴木 章斗, ペンダント頂点を付加した格子上のラプラシアンの特値解析, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

鈴木 章斗 (SUZUKI, Akito)

信州大学・工学部・助教

研究者番号: 70585611