

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：16401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740090

研究課題名(和文)分散型写像流の幾何解析

研究課題名(英文)Geometric analysis of dispersive flows

研究代表者

小野寺 栄治 (ONODERA, Eiji)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・准教授

研究者番号：70532357

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ケーラー多様体上の閉曲線流がみたすある4階分散型偏微分方程式に対する初期値問題を主に考察した。多様体が実2次元球面の場合、この方程式は渦糸運動やハイゼンベルグ古典スピン系の連続極限のモデルとして現れる。本研究では、多様体に対する設定と方程式の構造との関係を調べ、解の存在や一意性の証明に応用した。主結果は、多様体が(2次元球面を含む)定曲率閉リーマン面である場合における滑らかな時間局所解の存在と一意性である。実際、方程式の可解性に関する良い構造を発見し、適当なゲージ変換と幾何学的エネルギー法を組み合わせで可微分性の損失を解消することにより証明した。

研究成果の概要(英文)：The initial value problem for a fourth order dispersive partial differential equation for closed curve flow on a Kaehler manifold was mainly investigated. The equation models the motion of a vortex filament or the continuum limit of a classical Heisenberg spin chain systems, where the manifold is the two-dimensional unit sphere. In our research, we investigated the relationship between the setting for the manifold and the structure of the equation, and applied the observation to the proof of the existence and the uniqueness of the solution. The main results is the time-local existence and the uniqueness of a smooth solution under the case where the manifold is a closed Riemann surface with constant curvature. Indeed, we found a nice solvable structure of the equation, and completed the proof by the mix of a suitable gauge transformation and the geometric energy method to eliminate the loss of derivatives.

研究分野：偏微分方程式、幾何解析

キーワード：分散型偏微分方程式 初期値問題の時間局所解の存在と一意性 渦糸 古典スピン系

1. 研究開始当初の背景

ある種のリーマン多様体に値を取る曲線や写像の時間発展を記述する非線型分散型偏微分方程式の研究が 2000 年頃から盛んになりつつあった。特に、2 階の分散型偏微分方程式であるシュレーディンガー写像流方程式については、初期値問題の解法や解の挙動に関して多くの研究が進められていた。本研究代表者は、高階の分散型偏微分方程式に従う曲線流に対する類似的研究に取り組んできた。実際、ある渦糸運動の高次近似モデルとして知られる 3 次元の空間曲線に対する偏微分方程式系を幾何学的に一般化することにより、コンパクトケーラー多様体に値をとる曲線流に対する空間 1 次元 3 階非線型分散型偏微分方程式と空間 1 次元 4 階非線型分散型偏微分方程式が導出されていた。3 階の方程式については初期値問題の可解性と解が値を取る多様体の幾何学的設定との関係について一定の解明がなされたので、次に考察すべき対象は 4 階の方程式であった。方程式の階数が高いので、2 階や 3 階の方程式とは異なり、可微分性の損失による困難の克服が課題であった。閉じていない曲線流に対する初期値問題については、千原浩之氏（琉球大学）との共同研究によって、時間局所解の存在と一意性が従うことがわかったが、その証明は分散型偏微分方程式の基本解に対する局所平滑化効果を本質的に利用していたので、閉曲線流に対する初期値問題に直接適用することはできなかった。その後、閉曲線流に対する初期値問題については、多様体が定曲率リーマン面であるならば時間局所解が存在することがわかったが、この多様体に関する仮定の位置づけを含めて、より明快な証明を検討する余地があった。また、この解の一意性や時間大域的延長可能性は手付かずであった。

2. 研究の目的

曲線流に対する高階の分散型偏微分方程式の具体例を考察し、その初期値問題の一意可解性と幾何学的設定との関係を解明する。より具体的には以下のように述べることができる。

(1) 上で述べた閉曲線流に対する 4 階の分散型偏微分方程式の初期値問題の時間局所解の存在性を明らかにする。特に、解が値を取る多様体が定曲率リーマン面であることの位置づけを偏微分方程式論の視点から解明し、解の存在証明に応用する。

(2) この解の一意性を明らかにする。多様体値写像流の研究では、2 つの解（及びそれらの導関数）の差の意味付けや評価に工夫を要する点と方程式が高階である点により、一意性の証明が難航する可能性もあるが、出来る限り解決を試みる。

(3) この方程式が完全可積分系になるような多様体の枠組みを発見し、解の時間大域的延長可能性の証明に応用する。

3. 研究の方法

基本的方法は、関連する論文や書籍で技術の習得を行い、解決を試みることである。また、関連分野の学会や研究集会に出席したり、成果発表したりすることを通じて、情報収集を行い、解決策を探る。もう少し具体的な方策については以下のように述べられる。

(1) 解の存在性については、これまでの先行研究と同様に偏微分方程式論の視点を積極的に援用することで見通し良く解決できるものと思われる。

(2) 解の一意性を調べるためには、偏微分方程式論の視点だけでなく、幾何解析における微分幾何学の知識を更に補充したり、それらを巧く応用したりすることが必要と思われる。従来は、2 つの解の差や導関数の差を評価するために多様体の高次元ユークリッド空間への等長埋め込みを利用する方法が標準的であったが、この方法を用いると方程式の見かけの構造が複雑化するので高階方程式とは相性が良くないと思われる。この方針で難航した場合は、等長埋め込みの代わりに多様体上の平行移動作用素を用いてももう少し見通し良く解の導関数の差を評価できないか検討する。

(3) 上の(2)が難航した場合は、具体例（多様体を実 2 次元球面である場合）に立ち戻って様子を探ることにより、解決の糸口を模索する。

4. 研究成果

コンパクトケーラー多様体上の曲線流に対する空間 1 次元 4 階非線型分散型偏微分方程式の初期値問題の解法研究を進めた。主に、閉曲線流の場合すなわち未知関数の空間変数の定義域が 1 次元平坦トーラスである場合を考察した。この設定下では空間変数に関して見かけ上 2 階までの可微分性の損失が生じるため、標準的なエネルギー法により解を構成することは出来なかった。さらに、解の空間変数の定義域であるトーラスがコンパクトであるため、実数直線上の問題のように分散型偏微分方程式の基本解に対する局所平滑化効果が可微分性の損失を補填してくれることも期待できなかった。それゆえに、解の存在を示すためには、可微分性の損失を解消するような方程式の良い構造を解明・利用することが望ましかった。幸いにして研究開始の段階で、解が値を取る多様体が定曲率コンパクトリーマン面であるときに滑らかな時間局所解が存在することがわかった。当初の証明では、いわゆる修正エネルギーを見つけることにより可微分性の損失の解消に

成功していたが、その修正を行う理由や方程式の偏微分方程式系としての構造については解明の余地があった。そこで、千原浩之氏（琉球大学）の論文を参考にしながら、この定曲率条件の意味と偏微分方程式系としての構造との関係を見直した。そして、ある種のゲージ変換を組み合わせたエネルギー法により可微分性の損失を解消する方針で証明を作りなおした。自然なことではあるが、当初用いた修正エネルギーと後で用いたゲージ変換を組み合わせたエネルギーとが本質的に同じ働きをしていることも確認した。次に、この解の一意性の考察に着手した。2つの解の差や導関数の差を定義する際に、多様体上の平行移動作用素を用いる方法と、多様体の高次元ユークリッド空間への等長埋め込みを用いる方法の両方を試みた。しかしながら、いずれの方法を用いても、方程式の階数が高いために差がみたす偏微分方程式系の形が複雑で、なかなか解決することができなかった。そこで、最も考察しやすいモデルケースとして、多様体を実2次元球面である場合に立ち戻り、解の一意性が従うか様子を探ってみた。なお、この2次元球面值モデルは、渦糸運動のモデル方程式や古典スピン系の連続極限モデルとして導出されることが知られている。この球面值モデルに関して、まず、滑らかな解の一意性が実際に従うことを確認した。また、方程式が完全可積分系になるような方程式の係数関係に対する仮定のもとで、解が時間大域的に延長可能であることを確認した。次に、多様体が定曲率リーマン面の場合に解の一意性が従うか再び考察を行った。そして、今度は解の一意性が成り立つことを証明するに至った。解の差や導関数の差を扱う際には多様体の高次元ユークリッド空間への等長埋め込みを用いる方法を採用した。多様体の余次元が1とは限らないので球面值モデルに比べて解析が大変であったが、球面值モデルに対する一意性の証明と比較したり、多様体の断面曲率に関する公式の埋め込み表示版を考えたりして、肯定的に解決することができた。以上のように、時間局所解の存在性と一意性に関する研究については一定の成果が得られたと思われる。一方で、解の一意性の研究に想定以上の時間を要してしまったため、当初計画していた解の時間大域的延長可能性に関する研究については進めることができなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

著者名：小野寺栄治

論文標題：The initial value problem for a fourth-order dispersive closed curve flow on the two-sphere

雑誌名：Proceedings of the Royal

Society of Edinburgh, Section: A Mathematics、査読有り、掲載決定済(巻、掲載年、ページは未定)

著者名：千原浩之、小野寺栄治

論文標題：A fourth-order dispersive flow into Kähler manifolds

雑誌名：Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen、査読有り、Volume 34, Issue 2, 2015, pp. 221-249、

DOI: 10.4171/ZAA/1537

[学会発表](計 9 件)

発表者名：小野寺栄治

発表標題：ケーラー多様体上の曲線流がみたす分散型偏微分方程式

学会等名：第18回理学部門研究談話会

発表年月日：2016年1月20日

発表場所：「高知大学理学部(高知県・高知市)

発表者名：小野寺栄治

発表標題：A fourth order dispersive closed curve flow on compact Riemann surfaces with constant sectional curvature

学会等名：Workshop on Hyperbolic and Dispersive PDEs in Sendai

発表年月日：2015年12月17日

発表場所：東北大学理学研究科(宮城県・仙台市)

発表者名：小野寺栄治

発表標題：Uniqueness of a fourth-order dispersive flow for closed curves on compact Riemann surfaces with constant sectional curvature

学会等名：2015年度日本数学会秋季総合分科会(函数方程式論分科会)

発表年月日：2015年9月15日

発表場所：京都産業大学(京都府・京都市)

発表者名：小野寺栄治

発表標題：4階分散型閉曲線流の初期値問題

学会等名：RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」

発表年月日：2015年5月19日

発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

発表者名：小野寺栄治

発表標題：A fourth-order dispersive flow for closed curves on compact Riemann surfaces with constant curvature

学会等名：スペクトル・散乱 鹿児島シンポジウム

発表年月日：2014年1月11日
発表場所：鹿児島大学理学部(鹿児島県・鹿児島市)」

(2)研究分担者
なし

発表者名：小野寺栄治
発表標題：A fourth-order dispersive curve flow on compact Kähler manifolds
学会名：第30回九州における偏微分方程式研究集会
発表年月日：2013年1月31日
発表場所：福岡大学理学部(福岡県・福岡市)」

(3)連携研究者
なし

発表者名：小野寺栄治
発表標題：A fourth-order dispersive flow for closed curves on compact Riemann surfaces
学会名：2012年度日本数学会秋季総合分科会(函数方程式論分科会)
発表年月日：2012年9月21日
発表場所：九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)」

発表者名：千原浩之、小野寺栄治
発表標題：A fourth-order dispersive flow into Kähler manifolds
学会名：2012年度日本数学会秋季総合分科会(函数方程式論分科会)
発表年月日：2012年9月21日
発表場所：九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)」

発表者名：小野寺栄治
発表標題：閉曲線運動に対する4階分散型写像流の幾何解析
学会名：日本流体力学会 年会 2012
発表年月日：2012年9月16日、
発表場所：高知大学朝倉キャンパス(高知県・高知市)」

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.math.kochi-u.ac.jp/onodera/index.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

小野寺 栄治 (ONODERA Eiji)
高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・准教授
研究者番号：70532357