

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 12 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740091

研究課題名(和文) 圧縮性流体の基礎方程式系に現れる非線形波の安定性理論

研究課題名(英文) Stability theory of nonlinear waves for model systems of compressible fluid

研究代表者

中村 徹 (NAKAMURA, Tohru)

熊本大学・大学院先端科学研究部(工)・准教授

研究者番号：90432898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、圧縮性粘性流体の様々なモデル方程式を包括するような一般的な対称双曲・放物型連立偏微分方程式系を研究対象とし、境界層解と呼ばれる定常解の存在性及び漸近安定性に関する数学的証明を与えた。特に境界層解の存在性に関しては、定常問題に関わる平衡点近傍の局所安定多様体の次元が負の特性速度の個数によって表現されることを発見した。また関連する対称放物型連立系に現れる縮退境界層解の代数的時間漸近率に関して、空間重み指数の臨界値が5であることを示した。この値は単独粘性保存則に対する結果を鑑みると最適であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In the present research, we consider existence and asymptotic stability of a boundary layer solution for general symmetric systems of hyperbolic and parabolic equations. For the existence of the boundary layer solution, we show that the dimension of a local stable manifold associated with the stationary problem is given by the number of the negative characteristic speeds. For the related symmetric system of parabolic equations, we obtain the algebraic convergence rate of solutions toward the degenerate boundary layer solution. We also show that the critical value of the weight exponent is equal to 5. Concerning the result for the scalar viscous conservation laws, the result obtained in the present research is seemed to be optimal.

研究分野：数物系科学

キーワード：解析学 偏微分方程式論 流体力学 圧縮性流体 漸近解析 エネルギー法 粘性保存則 境界層解

## 1. 研究開始当初の背景

圧縮性粘性流体の運動を記述する偏微分方程式系には様々な形のもの知られているが、いずれも対称な双曲・放物型連立系に分類されるような非線形粘性保存則系で与えられる。その中でも全空間領域における熱伝導圧縮性粘性流体のモデル方程式に対しては、定数状態の漸近安定性が松村・西田 ([A6]) によりエネルギー法を用いて示されている。解の安定性を示す際に重要となる方程式系の性質は消散構造であるが、一般の対称双曲・放物型連立系に対する消散構造の特徴付けは1980年代に主に川島等によって成された ([A1], [A2], [A8], [A9])。すなわち与えられた方程式系が安定性条件と呼ばれる条件を満たすならば、解は熱核のように振る舞い、時刻無限において定数状態に収束する。従って全空間における定数状態の安定性問題は、安定性条件の成立を調べることにより容易に解決出来るようになった。

一方半空間上の問題については、解の境界面に対する法線方向導関数の評価に困難さが伴うため、安定性条件の成立を調べただけでは安定性を得る為の解のアプリオリ評価を得ることは出来ない。このような状況を受け、松村・西田 ([A7]) は半空間領域での熱伝導モデルに対し、技巧的なエネルギー法を駆使することにより解のアプリオリ評価の導出に成功した。また半空間領域においては、無限遠方に与える定数状態と境界条件として与える境界値の関係に応じて様々な非線形波が解の漸近形として現れることが松村 ([A5]) によって予想されており、その中でも等エントロピーモデルに対する境界層解と呼ばれる定常波の存在性と安定性が川島等 ([A4]) によって証明され、さらに熱伝導モデルに対しては研究代表者等 ([A3]) によって証明された。これらの方程式系は対称な双曲・放物型連立系の形で与えられるため、より一般的な連立系への拡張が待たれていた。  
[関連結果]

[A1] S. Kawashima, *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics*, Doctoral Thesis, Kyoto Univ. (1984).

[A2] S. Kawashima, *Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc.

Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **106** (1987), no. 1-2, 169–194.

[A3] S. Kawashima, T. Nakamura, S. Nishibata and P. Zhu, *Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half space: existence, stability and convergence rate*, Math. Models and Meth. in Appl. Sci., **20** (2010), No. 12, 2201–2235.

[A4] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 3, 483–500.

[A5] A. Matsumura, *Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), no. 4, 645–666.

[A6] A. Matsumura and T. Nishida, *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 1, 67–104.

[A7] A. Matsumura and T. Nishida, *Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 4, 445–464.

[A8] Y. Shizuta and S. Kawashima, *Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), no. 2, 249–275.

[A9] T. Umeda, S. Kawashima, and Y. Shizuta, *On the decay of solutions to the linearized equations of electromagnetofluid dynamics*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), no. 2, 435–457.

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、圧縮性粘性流体のモデル方程式系を包括するような一般的な対称双曲・放物型連立系に対し、半空間上での初期値境界値問題に現れる境界層解の存在性・安定性に関する数学的な証明を与えることにある。

(1) 境界層解の存在性 本研究の第一の目的は 1 次元半空間上における対称双曲放物型連立系に対し、境界層解の存在性を示すことである。

(2) 境界層解の漸近安定性 第二の目的として、方程式系に安定性条件の成立を仮定した上で境界層解の時間的漸近安定性を証明する。

(3) 縮退境界層解への時間漸近率 さらなる目的として、特に一つの特性速度が 0 に縮退する状況で現れる縮退境界層解について、時間漸近率と重み指数の臨界値について考察する。

### 3. 研究の方法

(1) 境界層解の存在性 考察対象である粘性の保存則系に対して定常問題を考える。これまでの圧縮性粘性流体のモデル方程式系に対する研究では、定常問題の方程式系を積分することで 1 階の力学系へと帰着し、平衡点周りのヤコビ行列の固有値を計算することで解の存在性を示した。本研究での粘性の保存則系は流体のモデル方程式系を一般化した形である為、同様の手法により境界層解の存在性を示すことが可能であった。特に固有値の一つが 0 となる縮退する場合においては、局所中心多様体が現れるため、解の存在性を示すためには非線形項の評価導出が重要となる。そこで非線形項のうち主要部となる 2 次の項を精細に評価し、中心多様体定理を適用することにより縮退境界層解の存在性を示した。

(2) 境界層解の漸近安定性 続いて (1) で存在性を示した境界層解の漸近安定性を示した。具体的には境界層解からの摂動に対してエネルギー法を適用し、ソボレフ空間での時間一様なアプリアリ評価を導出することにより時間大域解の存在性及び漸近安定性を示した。空間が全空間となる問題に対してはエネルギー法による評価の導出が確立されているが、本研究のような半空間上における問題に対しては一般的には導関数の評価に困難を伴う。そこで本研究では松村・西田 ([A6]) の手法を発展させることで解及びその時間微分評価を導出し、さらに川島等 ([A8], [A9]) による安定性条件のもと、双曲系に対応する解の消散的评价を求めることにより、アプリアリ評価を導出した。

(3) 縮退境界層解への時間漸近率 方程式系の粘性係数が正定値となる対称放物型連立系に対し、特性速度の一つが 0 に縮退する場合に現れる縮

退境界層解の漸近安定性に関連して、初期摂動に空間方向の代数的減衰を仮定することにより時間漸近率を算出した。手法は時空間重み付きエネルギー法による。さらに空間重み指数の臨界値が 5 となることを示すためにハーディ型不等式を用いた。

### 4. 研究成果

以下に本研究で得られた研究成果についてまとめる。以下の (1) 及び (2) に関する結果は研究論文にまとめられ現在投稿中である。なお関連する線形化問題についての結果は論文 [B5] に、結果の概要をまとめた講演論文は [B2], [B3] に掲載されている。また (3) の結果をまとめた論文は [B1] に掲載されている。

(1) 境界層解の存在性 1 次元半空間における対称双曲・放物型連立系に現れる境界層解の存在性を示すことに成功した。その際、特性速度の符号が負となる個数によって局所安定多様体の次元が決定されることを発見した。この事実は過去のモデル方程式系に対する研究結果とも合致するものであり、様々な方程式系を包括するような方程式系に対する境界層解の存在性を示す一般論の構築に成功した。特に特性速度の一つが 0 に縮退する場合においては、対応する特性速度場が真に非線形となる条件が解の存在性を保証する本質的な条件であることを発見した。

(2) 境界層解の漸近安定性 (1) で求めた境界層解に対して、初期摂動が十分小さいという仮定のもとで時間漸近安定性を示した。本結果により、これまでの具体的な圧縮性粘性流体に対する結果を包括するだけでなく、熱伝導圧縮性非粘性流体などに対する未解決な問題にも応用可能な一般論の構築に成功した。

(3) 縮退境界層解への時間漸近率 単独の粘性保存則に現れる縮退境界層解への代数的時間漸近率については、川島・倉田 ('09) の結果により空間重み指数の臨界値は 5 で与えられることが示されていた。一方で圧縮性流体のモデル方程式系に対しては、その指数が  $2(1 + \sqrt{2}) \doteq 4.8$  未満の場合に漸近率が求められていたが、臨界値が 5 になるかどうかは未解決のままであった。そこで本研究では一般化した放物型連立系に対して同問題を考察し、空間重み指数の臨界値が 5 となることを

突き止めた。本結果で用いた手法は圧縮性流体のモデル方程式を包括する対称双曲・放物型連立系にも応用可能であるため、本研究により上記の未解決問題は事実上解決したといえる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 7 件)

- [B1] T.Nakamura, *Degenerate boundary layers for a system of viscous conservation laws*, *Anal. Appl.*, **14** (2016), 75–99, DOI: 10.1142/S0219530515400047.
- [B2] T.Nakamura and S.Nishibata, *Boundary layer solution to system of viscous conservation laws in half line*, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series*, **47** (2016), 619–630, DOI: 10.1007/s00574-016-0173-7.
- [B3] T.Nakamura and S.Nishibata, *Stationary wave to system of viscous conservation laws in half line*, *京都大学数理解析研究所講究録*, **1947** (2015), 152–160.
- [B4] P.M.N.Dharmawardane, T.Nakamura and S.Kawashima, *Decay estimates of solutions for nonlinear viscoelastic systems*, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **64** (2015), 377–385.
- [B5] T.Nakamura and S.Nishibata, *Energy estimate for a linear symmetric hyperbolic-parabolic system in half line*, *Kinet. Relat. Models*, **6** (2013), 883–892, DOI: 10.3934/krm.2013.6.883.
- [B6] P.M.N.Dharmawardane, T.Nakamura and S.Kawashima, *Decay estimates of solutions for quasi-linear hyperbolic systems of viscoelasticity*, *SIAM J. Math. Anal.*, **44** (2012), 1976–2001, DOI: 10.1137/11083900X.
- [B7] T.Nakamura and S.Nishibata, *Asymptotic stability of stationary waves for symmetric hyperbolic-parabolic system*, *京都大学数理解析研究所講究録*, **1782** (2012), 150–157.

〔学会発表〕 (計 15 件)

- [C1] 中村 徹, *Asymptotic stability of station-*

*ary waves for symmetric hyperbolic-parabolic systems in half line*, 第 34 回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学, 2017 年 1 月 30 日～2 月 1 日.

- [C2] T.Nakamura, *Degenerate boundary layer solution to a system of viscous conservation laws*, The 11th AIMS Conference, Orlando (Florida, USA), 2016 年 7 月 1 日～5 日.
- [C3] T.Nakamura, *Degenerate stationary waves for a system of viscous conservation laws in half line*, Korea-Japan workshop on Nonlinear PDEs (11/30-12/2), Ulsan National Institute of Science and Technology (Korea), 2015 年 11 月 30 日～12 月 2 日.
- [C4] T.Nakamura, *Degenerate boundary layers for system of viscous conservation laws*, Fifth China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Wuhan University (China), 2015 年 11 月 17 日～22 日.
- [C5] 中村徹, 対称双曲放物型連立系に現れる境界層解について, 日本流体力学会 年会 2015, 東京工業大学, 2015 年 9 月 26 日～28 日.
- [C6] T.Nakamura, *Boundary layer solution to symmetric hyperbolic-parabolic system*, Recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws, NIMS (Daejeon, Korea), 2015 年 3 月 25 日～27 日.
- [C7] T.Nakamura, *Degenerate boundary layer solutions to symmetric parabolic system*, Workshop on Mathematical Sciences, Wayamba University of Sri Lanka, 2014 年 8 月 31 日.
- [C8] T.Nakamura, *Stationary waves to a symmetric hyperbolic-parabolic system in half line*, 15th International Conference on Hyperbolic Problems, The National Institute for Pure and Applied Mathematics (Brazil), 2014 年 7 月 28 日～8 月 1 日.
- [C9] 中村徹, *Stationary wave to system of viscous conservation laws in half line*, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 7 月 2 日～4 日.

- [C10] T.Nakamura, *Stationary wave to systems of viscous conservation laws in half line*, IMS Workshop on Nonlinear PDEs from Fluids and Related Topics, Chinese University of Hong Kong, 2014年3月24日～26日.
- [C11] 中村徹, 1次元対称双曲放物型連立系に現れる境界層解について, 第3回室蘭非線形解析研究会, 室蘭工業大学, 2013年11月1日～2日.
- [C12] T.Nakamura, *Stationary wave to systems of viscous conservation laws in half line*, RIMS Workshop “Kinetic Modeling and Related Equations: Conference in Memory of Seiji Ukai”, 京都大学, 2013年10月28日～30日.
- [C13] 中村徹, *Boundary layer solution to system of viscous conservation laws in half line*,

研究集会「第9回非線形の諸問題」, 高知大学, 2013年9月4日～6日.

- [C14] T.Nakamura, *Boundary layer solution to the symmetric hyperbolic-parabolic system*, The 7th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2012年11月5日～8日.
- [C15] T.Nakamura, *Boundary layer solution to systems of viscous conservation laws in half line*, 14th International Conference on Hyperbolic Problems, University of Padova (Italy), 2012年6月25日～29日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 徹 (NAKAMURA, Tohru)

熊本大学・大学院先端科学研究部・准教授

研究者番号：90432898