様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　5 月 31 日現在

機関番号：11501
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：24740092
研究課題名（和文）偏微分方程式に対するモジュレーション空間からのアプローチ

研究課題名（英文）Partial differential equations and modulation spaces

研究代表者
小林　政晴（Kobayashi, Masaharu）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：30516480

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：短時間フーリエ変換(波束変換)を用いた自由粒子および調和振動子のシュレディンガー作用素の新たな表示を導入し，これらの作用素のモジュレーション空間およびウィーナー・アマルガム空間における新たな評価式を得ることができた．このアイデアを用いて2次または劣2次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の解の新たな評価式を得ることができた．また，波束変換を用いてフーリエ・ル-ベーグ型の波面集合を特徴づけることにも成功した．

研究成果の概要（英文）：We introduce a new representation of the Schr\"odinger operators of a free particle and a harmonic oscillator by using the short time Fourier transform. As applications, we give new estimates for the solution to the Schr\"odinger equation with quadratic and sub-quadratic potentials in the framework of modulation spaces. We also characterize the Fourier-Lebesgue type wave front set by using the wave packet transform.

研究分野：数物系科学

キーワード：モジュレーション空間　ウィーナー・アマルガム空間　関数空間　シュレディンガー方程式

１．研究開始当初の背景

モジュレーション空間 $M^{p,q}(R^n)$ (および類似物であるウィーナー・アマルガム空間 $W^{p,q}(R^n)$)は 1980 年頃オーストリアの H. G. Feichtinger 氏により導入された比較的新しいユークリッド空間 R^n 上の関数空間である．p，q を $1 \leqq p,q \leqq \infty$ を満たす指数としたとき，$M^{p,q}(R^n)$はノルム

$$\|f\|_{M^{p,q}} = \left(\int_{R^n}\left(\int_{R^n}|V_g f(x,\xi)|^p\,dx\right)^{q/p}d\xi\right)^{1/q}$$

が有限になる緩増加超関数 $f \in S'(R^n)$全体の空間と定める．ここで，$V_g f(x,\xi)$は急減少関数 $g \in S(R^n)$を窓とする f の短時間 Fourier 変換であり，

$$V_g f(x,\xi) = \int_{R^n} f(y)\, g^*(y-x)e^{-iy\xi}dy$$

で定義される(形式的 g=1 とすると $V_g f(x,\xi)$ はよく知られる Fourier 変換 $f^\wedge(\xi) = \int_{R^n} f(y)\, e^{-iy\xi}dy$ と一致する)．$M^{p,q}(R^n)$は窓関数 $g \in S(R^n)-\{0\}$に依らない Banach 空間であり，特に p=q=2 の場合は L^2 空間 $L^2(R^n)$と一致する．モジュレーション空間はウィーン大学の H. G. Feichtinger 氏，K. Gröchenig 氏のグループ NuHAG (Numerical Harmonic Analysis Group)，イタリアの L. Rodino 氏のグループ，スウェーデンの J. Toft 氏のグループ，北京大学の B. X. Wang 氏のグループを中心にこれまで盛んに研究されてきた（これらの関数空間はフーリエ変換の代わりに窓フーリエ変換を用いて定義されるため，考える問題によってはルベーグ空間やソボレフ空間よりも関数の滑らかさや減少度を精密に測るのに適していると考えられる)．

研究開始当初はモジュレーション空間を偏微分方程式に応用するような研究はあまりなく，未解決な問題が多くあった(数年前まではモジュレーション空間と偏微分方程式の研究はあまり相性が良くないと考える研究者もいた)．一言付け加えておくと，多くの問題が未解決であったからといって，モジュレーション空間が決して面白くないという意味ではない．事実,「シュレディンガー作用素はルベーグ空間やベソフ空間上では有界ではないが，モジュレーション空間上では有界になる」などこれまで予想もしなかった結果が明らかにされ，関数空間の研究者だけでなく，偏微分方程式の研究者からも新たな可能性を持つ関数空間として注目を浴びていた．

２．研究の目的

(1) 先に述べたように Bényi – Gröchenig –Okoudjou – Rogers (J.Funct. Anal.(2007)) や Wang-Hudzik (J. Differential Equations, (2007)) は自由粒子のシュレディンガー作用素 $e^{it\Delta}$

$$e^{it\Delta}f(x) = \int_{R^n} f^\wedge(\xi)e^{it|\xi|^2}\, e^{ix\xi}d\xi,$$

はルベーグ空間やベソフ空間上では有界ではないがモジュレーション空間上では有界となるという興味深い研究を発表した．しかし，彼らによる評価式は偏微分方程式の立場（例えば，シュレディンガー方程式の時間局所解や時間大域解の研究)からはまだまだ改良できる点があるではないかと考えられていた．そこで，実解析的手法や関数解析的手法を用いて彼らの評価式を改良し，モジュレーション空間の枠組みでより精密な評価式を得るというのが当時(平成 24 年度)の研究目標であった．

(2) 研究成果(1)で得られた方法を自由粒子のシュレディンガー方程式以外の場合（例えば調和振動子のシュレディンガー方程式や２次または劣２次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式）にも応用し，モジュレーション空間またはウィーナー・アマルガム空間の枠組みで新たな評価式を得る（例えば，Cordero – Nicola (Math. Nachr. (2008) および J. Funct. Anal.(2008)) による調和振動子のシュレディンガー作用素のウィーナーアマルガム空間における評価式の改良）というのが第２の研究目標(平成 25 年度, 26 年度)であった．

３．研究の方法

(1) モジュレーション空間の枠組みにおけるこれまでの多くの研究では，自由粒子のシュレンガー作用素を評価するのにこれらの作用素のフーリエ変換を用いた表示(フーリエマルチプライヤー)を用いて行っていたが，短時間フーリエ変換（または窓フーリエ変換，波束変換）を用いた表示を用いた方が(少なくともモジュレーション空間の枠組みでは)より自然であると考えた． その際，空間変数だけでなく時間変数を考慮した短時間フーリエ変換を用いて，自由粒子のシュレディンガー作用素の新たな表示式を導入した．

(2) (1)で導入した空間変数だけでなく時間変数を考慮した短時間フーリエ変換を用いた方法がどのようなタイプの方程式に応用可能か考察し，特に調和振動子のシュレディンガー方程式や２次または劣２次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式に注目し研究を行った．その際，窓関数の選び方にも工夫をした．

４．研究成果

上記課題に関して，以下の成果を収めた ：

(1) 短時間フーリエ変換(波束変換)を用いて，自由粒子のシュレディンガー方程式の解の新たな表示を得た．この表示を用いる

と先に挙げたBényiら(2007)やWangら(2007)によりこれまで得られていた自由粒子のシュレディンガー作用素のモジュレーション空間評価よりも精密な評価を得ることが出来た．この評価はBényi – Okoudjou (Bull. Lond. Math. Soc. (2009))で扱われているタイプの非線形シュレディンガー方程式の初期値問題に対する時間局所解の一意存在定理にも応用可能であることも分かった([雑誌論文]，(5))．

(2) まずは，(1)で得られた方法を用いて，短時間フーリエ変換を用いた調和振動子のシュレディンガー方程式の新たな解の表示を得た．この表示により，Cordero-Nicola (2008) によってこれまで得られていた調和振動子のシュレディンガー作用素のウィーナー・アマルガム空間評価式よりも精密なウィーナー・アマルガム空間型の評価式を得ることができた([雑誌論文]，(3))．更に，(1)で得られた方法を発展させて，２次または劣２次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の解をモジュレーション空間の枠組みで評価することが出来た([雑誌論文]，(1)，(4))．これによりこれまで得られていたBényi – Gröchenig – Okoudjou – Rogers (2007), Wang - Hudzik (2007), Kato − Kobayashi − Ito (2011, 2012) らの結果を改良することが出来た.

(3) (1)の研究の副産物として，次の結果も得ることが出来た．Pilipovic – Teofanov - Toft (Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino (2008))が時間周波数解析の観点から導入したフーリエ・ルベーグ空間(すなわち，関数のフーリエ変換がL^p関数となるものの全体)型の波面集合(すなわち，関数の「フーリエ・ルベーグノルムの意味で」局所的に滑らかな点の補集合)を波束変換(短時間フーリエ変換)を用いて特徴づけることが出来た．この特徴付けはPilipovicらの特徴づけよりも偏微分方程式(特に１階の双曲型偏微分方程式)の研究に応用しやすいことが分かった([雑誌論文]，(2))．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

(1) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Funct. Anal. 266 (2014), 733–753, 査読あり．

(2) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Characterization of wave front sets in Fourier-Lebesgue spaces and its application, Funkcialaj Ekvacioj, 56 (2013), 1–17, 査読あり．

(3) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remarks on Wiener amalgam space type estimates for Schrödinger equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu B33 (2012), 41-48, 査読あり．

(4) K. Kato, S. Ito, M. Kobayashi, Application of wave packet transform of Schrödinger equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu B33 (2012), 29-39, 査読あり．

(5) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. 64, No. 2 (2012), 223-231, 査読あり．

〔学会発表〕（計　8　件）

(1) 小林 政晴, Modulation空間について, Saga Workshop on Partial Differential Equations, 佐賀大学, 2015年3月4日

(2) M. Kobayashi, Inclusion relation between Lp-Sobolev and Wiener amalgam spaces, 中華人民共和国, 北京大学, 2014年10月28日

(3) M. Kobayashi, Modulation spaces and Schrödinger equations, 2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, 中華人民共和国, 牡丹江師範学院, 2014年7月13日

(4) 小林 政晴, Modulation spaces and Schrödinger equations, 第６回 名古屋微分方程式研究集会, 名古屋大学, 2014年3月11日

(5) M. Kobayashi, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier Transform, 中華人民共和国, 北京師範大学, 2013年9月6日

(6) M. Kobayashi, The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces, 中華人民共和国,

北京師範大学，2013年8月27日

(7) M.Kobayashi,
Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier Transform, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2012，首都大学東京,2012年11月17日

(8) M.Kobayashi,
Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier Transform, Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators，フィンランド，Aalto University，2012年6月26日

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
小林 政晴（KOBAYASHI，Masaharu）
研究者番号：30516480
山形大学・理学部・准教授