

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740095

研究課題名(和文)作用素環への量子群の作用の研究

研究課題名(英文)Study of quantum group actions on von Neumann algebras

研究代表者

戸松 玲治(Tomatsu, Reiji)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70447366

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は主に、「無限テンソル積型作用の解析」、「von Neumann環のHaagerup性の定式化」そして「von Neumann環のHaagerup性の双加群を用いた研究」である。q変形量子群の無限テンソル積型作用は、実は極大トラスの作用から誘導されることを示した。Haagerup性については、von Neumann環の標準表現から定まる完全正值作用素の理論を使い定式化した。また、双加群を用いたアプローチによって、それまでに得られていたHaagerup性についての諸結果を強化することができた。

研究成果の概要(英文)：My main research results are "Analysis of infinite tensor product type actions", "Formulation of Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras" and "Study of Haagerup approximation property of von Neumann algebra by bimodule approach". I showed that any infinite tensor product type action of a q-deformed quantum group is actually induced from its maximal torus. I formulated Haagerup approximation property by using theory of completely positive operators on standard Hilbert spaces of von Neumann algebras. By bimodule approach, I succeeded in strengthening some results obtained before.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 von Neumann環 C*環 量子群

1. 研究開始当初の背景

作用素環論では、群や量子群の作用の研究は主たる研究課題の一つである。離散群が従順かつ、von Neumann 因子環も従順である場合は、Connes 以来多くの研究者によって分類が成されている。連続群の分類については、河東泰之氏(東京大学)による実数群の従順 II₁ 型因子環への作用の考察に始まり、増田俊彦氏(九州大学)と私の研究によって一応の解決を見ることができている。

さて、量子群について、泉正己氏(京都大学)は、無限テンソル積型作用は群の場合と本質的に異なる性質のものであることを明らかにした。しかし無限テンソル積型作用が誘導作用と共役であるかどうかは分かっていなかった。

次に、有限な von Neumann 環には Haagerup 性という性質が定式化されている(長田まり糸氏(大阪教育大学)による)。それを一般の von Neumann 環に対して導入することを考えた。

2. 研究の目的

(1). コンパクト Lie 群の q 変形によってできる量子群の無限テンソル積型作用を解析し、極大トーラスからの誘導作用であることを示す。

(2). Von Neumann 環の Haagerup 性を一般のタイプの von Neumann 環に拡張、導入すること。

(3). 量子群が Haagerup 性をもつとき、その量子群 von Neumann 環が(2)の意味での Haagerup 性を有することを示すこと。

3. 研究の方法

(1) について。

まず、作用の不動点環 N と全体環 M の相対可換子環 Q は、極大トーラスで量子群を割った非可換等質空間となる、という泉氏以来の事実を利用する。そこで、次のことを示す。

非可換等質空間(の関数環)は、I 型因子環である。

これは非可換ポワソン積分と、生成元の関係式を利用することで証明できる。

この結果を使うと、無限テンソル積型作用の von Neumann 環が、非可換等質空間のパートと、さらなる相対可換子環 R のテンソル積に分解することが分かる。もちろん不動点環との間には、 N が R に含まれる、という関係がある。次にこの包含について調べる。

この包含は、深さが 2 である既約な包含である。

深さが 2 であることを示すには、量子群の可積分作用についての、Paschke 型定理を用いる。によって、2 回の相対可換子環 R には、あるコンパクト量子群の極小作用が定まって、その不動点環が N となる。次の目標はこの量子群を求めることである。

この量子群は極大トーラスである。

これによって、 R は N と整数群の接合積に同型であることが分かる。の証明は、部分因子環論で用いられる、双加群とセクター(sector)の技術を用いる。

以上の結果をまとめると、 M は、 N と整ウエイト群の表現と非可換等質空間 Q で生成されていることが分かる。そこで、とくに整ウエイト群の部分と Q で生成された部分について考える。量子群は、整ウエイト群の部分をもちろん固定せず、あるユニタリ分だけずらす。このずらしは 1 コサイクルと呼ばれるもので、この場合は非可換等質空間 Q に値を取っている。

一方で、 q 変形量子群の関数環は、 Q と中心環とで生成されるが、中心環は整ウエイト群の表現で生成されている。ここからも Q に値を取る 1 コサイクルができる。そしてこの 1 コサイクルは、 Q 上では余積を「不変」にすることが分かる。これを標準的なコサイクルと呼ぶことにする。

Q に値を取る不変 1 コサイクルは、標準的なコサイクルで尽くされる。

この証明には Connes による 2 by 2 行列のトリックの類似を用いる。

さて によって、全体環 M に量子群の関数環を埋め込むことができる。このことから M への作用は極大トーラスから誘導されることが分かる。

(2) について。

Von Neumann 環の Haagerup 性を定義する方法は、大別すれば 2 つの可能性が考えられる。一つは、長田-Jolisaint 流に、正則状態あるいは正則荷重を用いる方法で、こちらは岡安類氏(大阪教育大学)と私との共同研究とは独立に Caspers-Skalski によって定式化された。もう一つの方法が我々の採用したもので、Von Neumann 環の標準表現の正錘から定まる Hilbert 空間の順序を用いて、完全正值作用素の言葉で定式化する方法である。この方法は Terp が以前 von Neumann 環の半離散性を特徴付ける際に利用した方法であり、我々は Haagerup 性を定式化する際も完全正值作用素の方法が上手く働くことを示した。

我々の主たる目標は、条件付き期待値に関する安定性である。つまり、von Neumann 環 M から部分 von Neumann 環 N へ条件付き期待値が存在するとする。この際条件付き期待値に正則性を仮定しない。そして M は Haagerup 性をもつとする。このとき、 N も Haagerup 性を持つことを示す。これには、まず次のことを示す。

G を可換群とし、 M への作用を考え接合積を取る。その接合積が Haagerup 性を有するならば、 M は Haagerup 性を持つ。

この結果からまず、前述した Haagerup 性の 2 通りの定義は一致することが分かり、必要に応じて長田-Jolisaint 流に完全正值写像を用いることが可能となる。

先の状況の N と M を考えて、固有無限 von Neumann 環に関する竹崎の連続分解を援用すれば、 N を有限 von Neumann 環、 M を半有限 von Neumann 環と仮定して証明すればよいことが分かる。

残る問題は、 N の標準 Hilbert 空間を M の標準 Hilbert 空間の中に、近似的に埋め込む方法である。これは、Connes や Anantharaman-Delaroche の方法を参考にすれば可能である。

(3) について。

(2) の結果の一つである、条件付き期待値と Haagerup 性の関係については、直接的な証明とは言えない。そこで、小澤登高氏(京都大学)と岡安類氏との共同研究で、Haagerup 性を双加群を用いた方法で定式化した。この方法の利点は、(2) で得られていた群作用と Haagerup 性の関係や、先の条件付き期待値との関係について統一的な解釈を得られることである。

証明の手法は、両側有界ベクトルを用いて、von Neumann 環上に完全正值写像を作り、自明表現を Fell の意味で弱包含する双加群からは、長田-Jolisaint 流の Haagerup 性の特徴付けを導くことである。

また、この結果を利用して、量子群の Haagerup 性を考えると、量子群 von Neumann 環に遺伝することが分かる。これは、離散群の場合の長田氏による先駆的な結果の一般化となっている。

4. 研究成果

(1) の結果。

G_q をコンパクトリー群の q 変形とする。この無限テンソル積型作用は極大トーラスの極小作用から誘導される。

さらに、この極大トーラスの作用はもとの作

用の制限で得られている。このことから、 G_q が量子 $SU(2)$ 群の場合には、無限テンソル積型作用を分類することができる。

(2) の結果。

M を von Neumann 環とし、 N をその連続な core von Neumann 環とする。このとき、 M が Haagerup 性をもつことと N が Haagerup 性をもつことは同値である。

N を von Neumann 環 M の部分 von Neumann 環とし、 M は Haagerup 性をもつとする。もし、 M から N への条件付き期待値が存在するならば、 N も Haagerup 性を有する。

(3) の結果。

M を von Neumann 環とすると、 M が Haagerup 性をもつことと、 M が強混合的な M 双加群であって、自明表現を弱包含するものが存在することは同値である。

G を局所コンパクト量子群とし、 $L(G)$ をその von Neumann 量子群環とする。もし G が Haagerup 性をもつならば、 $L(G)$ も von Neumann 環として Haagerup 性をもつ。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- (1) T. Masuda, R. Tomatsu,
Rohlin flows on von Neumann algebras,
to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
掲載確定 (巻数・頁数・発行年未定)
(査読有り)
- (2) R. Tomatsu,
On product type actions of G_q ,
Adv. Math. **269** (2015), no. 10, 162--196.
(査読有り)
- (3) T. Masuda, R. Tomatsu,
Classification of actions of discrete Kac algebras on injective factors,
to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
掲載確定 (巻数・頁数・発行年未定)
(査読有り)
- (4) R. Okayasu, R. Tomatsu
Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras,

to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.
掲載確定 (巻数・頁数・発行年未定)
(査読有り)

(5) R. Okayasu, R. Tomatsu
Haagerup approximation property and
positive cones associated with a von
Neumann algebra,
to appear in J. Operator theory.
掲載確定 (巻数・頁数・発行年未定)
(査読有り)

(6) M. Caspers, R. Okayasu, A. Skalski,
R. Tomatsu,
Generalisations of the Haagerup
approximation property to arbitrary
von Neumann algebras,
C. R. Acad. Sci. Paris 352 (2014), no.6,
507—510.
(査読有り)

[学会発表](計8件)

発表者：戸松玲治
発表標題：
「Haagerup property for von Neumann algebras」
作用素環論の最近の進展 (Recent
Developments in Operator Algebras), RIMS, 京
都, September 9, 2014.

発表者：戸松玲治
発表標題：
「Haagerup property for von Neumann algebras」
日本数学会秋季総合分科会, 広島大学, 広島,
September 27, 2014.

発表者 戸松玲治
発表標題
「Von Neumann 環への群・量子群作用の分類
問題」
日本数学会年会, 函数解析学分科会 特別講
演, 京都大学, 京都, March 20, 2013.

発表者 戸松玲治
発表標題
「Product type actions of G_q 」
Workshop on operator algebras,
The university of Tokyo, 東京, May 11,
2013.

発表者 戸松玲治
発表標題
「Product type actions of G_q 」

日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学, 愛媛,
September 26, 2013.

発表者 戸松玲治
発表標題
「Product type actions of G_q 」
Operator Spaces, Locally Compact
Quantum Groups and Amenability, Fields
institute May 26, 2014. (トロント, カナダ)

発表者 戸松玲治
発表標題「Product type actions of G_q 」
ICM Satellite Conference on Operator
Algebras and Applications, Cheongpung,
Korea, August 9, 2014.

発表者 戸松玲治
発表標題「Rohlin flows on von Neumann
algebras」
RIMS 研究集会「作用素環論の最近の発展と
関連する話題について」 RIMS, 京都,
September 24, 2012.

[その他]
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tomatsu>

6. 研究組織
研究代表者
戸松 玲治 (TOMATSU, Reiji)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号：70447366