

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740104

研究課題名(和文)一般モノドロミー保存変形のシンプレクティック幾何学的描像の確立

研究課題名(英文) Establishment of the symplectic picture for isomonodromic deformations

研究代表者

山川 大亮 (YAMAKAWA, Daisuke)

東京工業大学・理工学研究科・助教

研究者番号：20595847

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：分岐不確定特異点を持つ有理型接続の枠付きモジュライ空間を複素シンプレクティック多様体として構成し、更に研究協力者のBoalchと共に、有理型接続のリンク付き局所一般モノドロミーデータをパラメータ付ける擬ハミルトン空間を単純レベルの場合に構成した。また研究協力者の廣恵と共に、一点で不分岐不確定特異点、他で確定特異点を持つ有理型接続のモジュライ空間が中島箆多様体と同型である事を示した。更にタウ関数がある意味で一般モノドロミー保存変形のハミルトニアンを与えている事を確認し、また有理型接続のFourier-Laplace変換が一般モノドロミー保存変形方程式を保つ事を示した。

研究成果の概要(英文)：I constructed the framed moduli spaces of meromorphic connections on the projective line as complex symplectic manifolds, and furthermore with Boalch, constructed the quasi-Hamiltonian spaces parameterizing local generalized monodromy data of meromorphic connections with a link. Also, with Hiroe, I showed that the moduli spaces of meromorphic connections with an unramified irregular singularity and arbitrary number of regular singularities are isomorphic to Nakajima quiver varieties. Furthermore I checked that the isomonodromy tau functions induce the Hamiltonians for isomonodromic deformations in some sense, and showed that the Fourier-Laplace transform of meromorphic connections induce symmetry of isomonodromic deformation equations.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：有理型接続 一般モノドロミー保存変形 一般モノドロミー保存変形方程式 有理型接続のモジュライ空間 一般モノドロミーデータのモジュライ空間 中島箆多様体 Fourier-Laplace変換 タウ関数

1. 研究開始当初の背景

80年代に神保・三輪・上野によって確立された有理型接続(有理型関数を係数に持つ線形常微分方程式)の一般モノドロミー保存変形は、数理物理学、表現論、代数幾何学といった多岐に渡る分野と深い関わりを持つ。この変形はある非線形偏微分方程式(一般モノドロミー保存変形方程式)によって支配されており、その相空間に当たる有理型接続のモジュライ空間上に適切なシンプレクティック構造を導入する事で、時間依存型のハミルトン系としても書き表す事が可能である。

厳密に言えば、上記の事実は有理型接続の特異点に対するある仮定の下で確かめられており、一般の場合(特に分岐不確定特異点の場合)には、Bremer-Sageによる部分的な結果があるものの、一般モノドロミー保存変形のシンプレクティック幾何学的描像に対する理解は十分なされていない状況であった。特に、神保・三輪・上野の相空間を、Bremer-Sageが考察した状況より更に広い状況で複素シンプレクティック多様体として構成する事、更に一般モノドロミー保存変形方程式を線形化するために必要な、有理型接続の一般モノドロミーデータのモジュライ空間を一般の状況で構成する事が大きな課題であった。

2. 研究の目的

(1) 神保・三輪・上野が一般モノドロミー保存変形方程式の相空間として採用していた有理型接続の枠付きモジュライ空間を、有理型接続が一般の場合(特に分岐不確定特異点を持つ場合)に滑らかな複素シンプレクティック多様体として構成する。

(2) 一般モノドロミー保存変形方程式を線形化するために必要な一般モノドロミーデータの枠付きモジュライ空間を、(1)のモジュライ空間の乗法的類似物として構成する。

(3) 一般モノドロミー保存変形方程式を時間依存型ハミルトン系として記述するのに必要な枠付きモジュライ空間の良い正準座標系を発見する。

3. 研究の方法

(1) 分岐不確定特異点を持つ有理型接続の枠付きモジュライ空間を以下に述べるような方法によって構成する。まずDrinfeld-Sokolovの理論を参考に、各特異点に対し、その点における有理型接続の局所的な情報を用いてループ代数の次数付けを与える。特異点が不分岐の場合、これは標準的な次数付けと一致する。そして古典的な有理型接続の形式簡約理論の一部をこの次数付けループ代数で行い、その結果として、有理型接続の特異点におけるローラン展開の主要部とその点における枠をパラメータ付け

るシンプレクティック多様体を得る。最後に、各特異点に対し構成されたシンプレクティック多様体達の直積を取り、シンプレクティック簡約を行う事で枠付きモジュライ空間を構成する。

(2) 上記の枠付きモジュライ空間の構成をヒントにして、今度は各特異点に対し、その点における有理型接続の局所的な一般モノドロミーデータ、及び基点と特異点の周りの解を接続する行列をパラメータ付ける空間を擬ハミルトン空間として構成する。これら擬ハミルトン空間達の直積を取り、擬ハミルトン簡約(群値シンプレクティック商)を行う事で、一般モノドロミーデータの枠付きモジュライ空間をシンプレクティック多様体として構成する。

(3) パンルヴェ方程式や野海・山田系等、ハミルトン構造が非常に良く理解されている一般モノドロミー保存変形方程式を参考に、有理型接続の枠付きモジュライ空間の正準座標系で、一般モノドロミー保存変形方程式の時間依存型ハミルトン系としての記述と相性が良いものを探る。

4. 研究成果

(1) 分岐不確定特異点を持つ有理型接続の枠付きモジュライ空間を、上で述べた研究方法に従い、シンプレクティック商として構成した。これは神保・三輪・上野の仮定の下でBoalchが得た結果を拡張したものであり、また可積分系分野で広く知られているDrinfeld-Sokolov階層と呼ばれる非線形偏微分方程式系との関係について理解を深めるものになった。この結果について、いくつかの研究集会で成果報告を行った。

(2) 研究協力者であるPhilip Boalch(パリ第11大学)と共同研究を行い、有理型接続の分岐不確定特異点における局所的な一般モノドロミーデータ、及びその周りの解と基点の周りの解を接続する行列(リンク)をパラメータ付ける空間を、単純レベル(形式解の指数関数因子の肩に乗るものが単項式)の場合に擬ハミルトン空間として構成した。一般の場合の擬ハミルトン空間の構成は、不分岐の場合と同様、フュージョンと呼ばれる操作によって単純レベルの場合に帰着される事が期待されるため、その部分を今後正当化したい。その結果、コンパクトリーマン面上の有理型接続の一般モノドロミーデータのモジュライ空間の構成が完全に一般の状況で完成する事になり、代数幾何学、可積分系、表現論といった多分野に大きなインパクトを与える事が期待される。

(3) 研究協力者である廣恵一希(城西大学)と共同研究を行い、一点で不分岐不確定特異点、他で確定特異点を持つ有理型接続のモジ

ユライ空間が、中島籠多様体と呼ばれる幾何学的表現論において広く知られている複素シンプレクティック多様体と同型である事を示した。これは有理型接続が確定特異点しか持たない場合に示した Crawley-Boevey の結果、及び一点でポアンカレ階数 2 以下の場合に示した Boalch の結果の拡張であり、Boalch によって提起されていた予想を肯定的に解決したものである。また、これによって有理型接続の枠付きモジュライ空間に標準座標系が定まり、これが一般モノドロミー保存変形方程式の時間依存型ハミルトン系としての記述に役立つのではないかと期待される。この結果については既に論文が出版されており、また国内外の研究集会において成果報告も行った。

(4) 神保・三輪・上野によって導入された一般モノドロミー保存変形のタウ関数を考察し、その対数微分がある意味で一般モノドロミー保存変形方程式のハミルトニアンを与える事を確認した。これは神保・三輪・毛織・佐藤方程式やその他特別なクラスの一般モノドロミー保存変形方程式に対しては証明されていたものの、一般の状況では厳密な証明が得られていなかった。この結果に関しては研究集会で成果報告を行っている。

(5) 一般モノドロミー保存変形の構造をより深く理解するため、有理型接続の積分変換としてよく知られている Fourier-Laplace 変換について考察し、Fourier-Laplace 変換が一般モノドロミー保存変形方程式を保つという結果を得た。これは特別な条件の下で Woodhouse が示した結果を大幅に拡張するものであり、一般モノドロミー保存変形方程式の対称性を理解する上で重要な結果であると思われる。この結果についてはプレプリントを既に公表し、現在学術雑誌に投稿中である。また、国内外の研究集会で成果報告も行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Kazuki Hiroe, Daisuke Yamakawa, Moduli spaces of meromorphic connections and quiver varieties, *Advances in Mathematics*, 査読有, vol. 266, 2014, 120-151
DOI:10.1016/j.aim.2014.05.024

[学会発表](計 12 件)

Daisuke Yamakawa, Isomonodromic deformations from Hamiltonian point of view, Moduli spaces of flat connections and related topics, 2014 年 11 月 16 日, 早稲田大学(東京都新宿

区)

Daisuke Yamakawa, Moduli spaces of meromorphic connections and quiver varieties, Moduli spaces of connections, 2014 年 7 月 1 日, レンヌ(フランス)

山川 大亮, 中間畳み込みとモノドロミー保存変形、アクセサリー・パラメーター研究会, 2014 年 3 月 9 日, 熊本大学(熊本県熊本市)

山川 大亮, Fourier-Laplace transform and isomonodromic deformations, Isomonodromic deformations and related topics, 2013 年 11 月 23 日, 早稲田大学(東京都新宿区)

Daisuke Yamakawa, Fourier-Laplace transform and isomonodromic deformations, Recent progress in the theory of Painleve equations: algebraic, asymptotic and topological aspects, 2013 年 11 月 4 日, ストラスブール(フランス)

山川 大亮, Moduli spaces of meromorphic connections and quiver varieties, 代数幾何学と可積分系におけるモジュライ理論, 2013 年 9 月 17 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

Daisuke Yamakawa, Meromorphic connections, quiver varieties and Fourier-Laplace transform, Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous spaces, 2013 年 8 月 27 日, 名古屋大学(愛知県名古屋市)

山川 大亮, 加法的 Deligne-Simpson 問題、函数方程式論サマーセミナー, 2013 年 8 月 7 日~2013 年 8 月 8 日, 阿蘇いこいの村(熊本県阿蘇市)

山川 大亮, Laplace 変換とモノドロミー保存変形、超幾何方程式研究会 2013, 2013 年 1 月 7 日, 神戸大学(兵庫県神戸市)

Daisuke Yamakawa, Moduli spaces of meromorphic connections and their symmetries, Workshop on integrable systems and geometric PDEs, 2012 年 10 月 20 日~2012 年 10 月 21 日, 台北市(台湾)

山川 大亮, 分岐不確定特異点を持つ有理型接続のモジュライ空間、アクセサリー・パラメーター研究会, 2012 年 9 月 11 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市)

山川 大亮, 分岐不確定特異点を許した主束上の有理型接続のモジュライ空間、古典解析セミナー, 2012 年 6 月 27 日, 東京大学(東京都目黒区)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.titech.ac.jp/~yamakawa/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山川 大亮 (YAMAKAWA, Daisuke)
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 20595847

(2) 研究協力者

齋藤政彦 (SAITO, Masa-Hiko)
原岡喜重 (HARAOKA, Yoshishige)
大島利雄 (OSHIMA, Toshio)
廣惠一希 (HIROE, Kazuki)
BOALCH, Philip