2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４０１０８
研究課題名（和文）量子流体の側面から見たシュレディンガー方程式の解の構造の研究

研究課題名（英文）Study of structure of solutions to Schrodinger equation from quantum-fluid point of view

研究代表者
眞崎　聡（Masaki, Satoshi）

広島大学・工学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：２０５８０４９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、シュレディンガー方程式の量子流体としての側面に着目し、対応する古典力学の崩壊現象とシュレディンガー方程式の解の爆発現象との関係を調べることを目標として開始された。その際、近年分散型方程式で進展の目覚ましい、結果の否定から架空の解を構成するという背理法の議論を用いることにした。
まずこの手法について研究を進めた結果、予想外の方向へ進展し、質量劣臨界と呼ばれる基底状態が安定となる場合に、適切な意味で最小となる特殊な非散乱解を発見するに至った。この解は、従来知られていた解とはどれとも異なる挙動を示すものである。その後、関係の深い一般化KdV方程式も考察し、同様の現象が起こることを確認した。

研究成果の概要（英文）：The first intend of the research was to focus on quantum-fluid properties of Schrodinger equations and to clarify the correspondence between blowup of solution to a nonlinear Schrodinger equation and collapse of solution of a corresponding classical fluid equation. The intended method for this analysis is a contradiction argument that construct a virtual solution from failure of a target conclusion. In this decade, there is much progress on this kind of argument.
The research progresses unexpectedly and a special non-scattering solution which is minimal in a suitable sense is found for mass-subcritical equations. Behavior of the solution is completely unknown and different from any of those we knew before. I also consider generalized KdV equations and find that similar kind of threshold solution exists.

研究分野：非線型偏微分方程式

キーワード：非線形シュレディンガー方程式　分散型方程式　KdV 方程式　一般化KdV方程式　解の長時間挙動　解の長時間挙動　最小化問題　最小爆発解

１．研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式は、半導体やボーズアインシュタイン凝縮などのモデル方程式であり、量子的な側面を持つ。この方程式が量子流体方程式と見なせることは古くから知られており、Madelung (1927)に遡る。

量子流体とみなした形での非線形シュレディンガー方程式の解析は、量子効果を表す量子圧力項が現れ、数学的にはこの項の取り扱いが難しい。Grenier (1998)によって、巧みな対称双曲型方程式への変形が導入され、それによりソボレフ空間の枠組みでこの解析ができるようになった。また、このことにより、古典力学への収束を表す半古典極限が非線形方程式に対しても詳しく理解されるようになった。特に、非線形方程式に対して、プランク定数に相当するパラメータのべきで漸近展開である WKB 近似が正当化された。

２．研究の目的

本研究は、このような量子流体の方程式の解析を通して、古典力学に対応する流体方程式、具体的にはオイラー方程式、の解が滑らかさを失う崩壊現象とシュレディンガー方程式の解の爆発現象との対応関係を調べること、またそのことによって非線形シュレディンガー方程式の性質を量子流体としての側面から明らかにすることが目的である。前者の半古典近似問題における焦点の形成に対応しており、シュレディンガー方程式の解の爆発よりは弱いものである。

しかし、予想外の方向への進展があったため、当初の予定を変更した。この状況および修正した目標は、４．にて詳しく述べる。

３．研究の方法

近年、シュレディンガー方程式を含む分散型方程式の解析において、ある物事を証明するために、結果の否定から架空の解を構成し、その架空の解の解析を通してその架空の解の存在を否定することで目的の物事が正しいことが分かる、という背理法をベースとした議論が現れ、大きく発展している。本研究では、このような背理法の考え方を応用し、上記の研究に取り組むことを当初の方法として研究を行った。

ここで、この方法を選んだ一つの理由は、予めどのようなことが起こるのか明確な見当がついていなかったからである。この方法を用いると、起きないと予想されることを仮定し架空の解が構成できる。その解は一般の解よりもずっと良い性質を持っていることが多い。もし、このような解が存在することが否定されるなら当初の目的が達成できるし、もし仮に存在することが正しいことが分かったとしても、最初の予想が間違っていたことが分かるだけでなく、さらにその予想の反例となる、性質の良い特殊解を見つけることができたことになるという利点がある。

４．研究成果

①本研究は、架空の解を構成するために用いられる、分散型方程式に対する凝集コンパクト性の議論を構築することを最初の目標として研究を始めた。研究を開始した時点では、シュレディンガー方程式においては、この技術は２乗可積分関数やソボレフ空間のクラスで構築されていた。本研究で対象としたかった方程式の解析には、これらの空間だけでは扱えない場合があるため、重み付き空間の枠組みへと拡張することを試み、これに成功した。

その後、目的の背理法をベースとした解析を行うために関連結果を精査したところ、本研究を遂行する目的で構築した重み付空間での凝集コンパクトを用いることで、質量劣臨界と呼ばれる場合の非線形シュレディンガー方程式に対して、散乱解と非散乱解の境目になっている特殊な解を発見することに至った。ここで、質量劣臨界とは、基底状態解が軌道安定となるための条件と一致しており、物理的に重要であるモデルが含まれる場合である。

既存の研究では、質量劣臨界以外の場合、つまり質量臨界または質量優臨界の場合、のみが考察されていて、その結果として、上記のような散乱解と非散乱解の境目としては基底状態解が現れることが知られていた。本研究において発見したものは、先験的に基底状態解ではないことが分かる。その上、現在存在が確認されている解のどれとも違う挙動の解であることが判明した。これを最小非散乱解と名付けた。以上が平成２４年度の研究であり、文献（〔その他〕，[2]）としてまとめた。

この解について詳しく調べることに大きな意義があると判断し、以後、本研究は当初の目的を修正し、この解がどのような解であるかを明らかにすることを主な目標として掲げ、その達成のために、まずはこの解が持っている性質をできるだけ詳しく調べることとして研究を進めることとした。

また、修正前の目標に関しては、上記の研究で得られた知見を活かしながら、解析の基礎となる枠組み・道具づくりを行う形に修した。

この方向の研究に関しては、平成２４年度では、量子流体的手解析と関係の深い遠方で増大する非線形相互作用ポテンシャルをもつモデルについて定在波解の解析を行った。この結果は文献（〔雑誌論文〕、[5]）として発表した。

②平成２５年度は、最小非散乱解の解の解析を遂行するのによりふさわしいと思われる

斉次重み付空間へ解析の枠組みを広げることを目標として研究を進めた。この結果、前年度に得られた結果の技術的な制約を緩めることに成功し、扱える非線形項の範囲を拡大することができた。この結果は、文献（[雑誌論文]，[4]）としてまとめた。

以上の研究成果は主に国内で高い評価を受け、日本数学会において招待講演（〔学会講演〕、[4]）を行うに至った。また、本研究は国際研究に発展し、R. Killip 氏、J. Murphy 氏、M. Visan 氏らとの共同研究を 2015 年 1 月～3 月まで行い、斉次重み付空間の設定において時間に関して有界な解の挙動を決定するに至った。しかしこの共同研究の内容は、本研究期間内には論文として出版されていない。

平成２５年度には、変更後の主目的であった、最小非散乱解の挙動の理解については、進展が得られなかった。これは、この問題が、既に知られている挙動を示す解を候補として与え、それが正しいかどうかを判定する問題ではなく、その候補が何かを見つけ出さなければならない問題である、というところに本質的な難しさがある。

修正前の研究予定であった、量子流体としての側面からの研究に関しては、その解析と関係の深い遠方で増大する非線形相互作用ポテンシャルをもつモデルについて定在波解の解析を進展させた。この結果は文献（〔雑誌論文〕、[3]）として発表した。

③平成２５年度の研究を通して、挙動の決定が想像以上に難しいことが理解されてきたため、平成２６年度からは、少し角度を変えて他の非線形分散型方程式問題に取り組んでみることにした。

非線形分散型方程式に関しては、方程式間で共通している点と異なる点があるため、本研究で発見した現象がシュレディンガー方程式に特有の現象であるのか、それとも別の方程式でも起こり得る、より一般的な現象かを確かめることには大きな意義があるからである。もし一般的な現象であるならば、そのような方程式のどれかで適切な候補を見つけることができれば、他の方程式についても類推できることが期待できる。この現象を理解するという観点からは、シュレディンガー方程式のみに対称を絞るより、それ以外の方程式も含めて横断的に物事を考えるほうが易しい可能性がある。

具体的な研究対象として、一般化 KdV 方程式を設定した。KdV 方程式はソリトン現象を理解するために導入されたものであり、多くの研究の蓄積があるからである。

平成２６年度は、一般化 KdV 方程式において最小非散乱解を見つけるために必要な道具立てを行った。非線形シュレディンガー方程式の場合は、ガリレイ変換の生成作用素にあたるハイゼンベルク作用素を用いることで、質量劣臨界方程式の解析が上手くいく。しかし、この手法はシュレディンガー方程式特有の対称性に依拠しているため、一般化 KdV 方程式には適用できない。そこで、このような性質に頼らない方法として、フーリエルベーグ空間の枠組みを導入することにした。そこでの時空分散型評価（ストリッカーツ評価）を新たに構築し、それを用いることで適切性を示した。この結果は、文献(〔研究論文〕、[1])としてまとめた。

また修正前の予定であった、量子流体としての側面からの研究に関しては、空間 2 次元のシュレディンガー・ポアッソン方程式系を考え、量子流体としての側面から扱うことが可能な関数のクラスを広げることを考察した。これは、この方程式の標準的な解析方法である線形シュレディンガー方程式の摂動とみなして解く方法に比べ、量子流体として扱うことのできる関数のクラスが制限されていたからである。当初の目的を達成するためには、2 種類の解析を組み合わせることが必要であるため、扱うことのできるクラスをそろえる必要がある。このために、自然だと思われる限界の空間まで拡張することができた。この結果は、(〔研究論文〕、[2])として発表した。

④平成２７年度は、平成２６年度で構築したフーリエルベーグ空間の枠組みを用いることによって、一般化 KdV 方程式においても最小非散乱解が存在することを確かめた。さらに興味深いことに、この解は非線形シュレディンガー方程式における最小非散乱解と密接な関係を持っていることが分かった。この関係性は、ある種の特異極限において、一般化 KdV 方程式の解が非線形シュレディンガー方程式によって近似されるという現象に端を発している。

この研究は、文献（〔その他〕、[1]）としてまとめ、現在登校中である。また、インターネットで公開している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

[1] S. Masaki and J. Segata, On well-posedness of generalized Korteweg-de Vries equation in scale critical ^Lr space, 査読あり，Analysis & PDE, (2016), 掲載決定

[2] S. Masaki and T. Ogawa, Existence and uniqueness of two dimensional Euler-Poisson system and WKB approximation to the nonlinear Schrodinger-Poisson system, 査読あり，

Journal of Mathematical Physics, 56, (2015), 121502, DOI 10.1063/1.4936309.

[3] M. Maeda and S. Masaki, A survey on nonlinear Schrodinger equation with growing nonlocal nonlinearity, 査読あり, Adv. Stud. in Pure Math., 64 (2015), 273{280.

[4] S. Masaki, A Sharp scattering condition for focusing mass-subcritical nonlinear Schrodinger equation, 査読あり, Comm. in Pure and Applied Analysis 14 (2015), no.4, 1481{1531, DOI 10.3934/cpaa.2015.14.1481

[5] M. Maeda and S. Masaki, An example of stable excited state on nonlinear Schrodinger equation with nonlocal nonlinearity, 査読あり, Differential Integral Equations 26 (2013) no. 7-8, 731-756,

〔学会発表〕(計 8 件)

[1] 眞崎聡、瀬片純市、一般化 Korteweg de Vries 方程式の小さな初期値に対する大域解の存在と散乱、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015 年 9 月 13 日～2012 年 9 月 16 日、京都産業大学(京都府・京都市)

[2] 眞崎聡、瀬片純市、L^2 劣臨界一般化 KdV 方程式の長時間挙動、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015 年 9 月 13 日～2012 年 9 月 16 日、京都産業大学(京都府・京都市)

[3] Satoshi Masaki, Restriction estimate and its application to generalized KdV equation in ~Lp space, The 3rd East Asian Conference in Harmonic Analysis, 2015 年 8 月 10 日～2015 年 8 月 14 日, 東京大学(東京)

[4] 眞崎聡、質量劣臨界非線形シュレディンガー方程式の解析、日本数学会 2015 年度年会 (招待講演)、2015 年 3 月 21 日～2015 年 3 月 24 日、明治大学(東京)

[5] Satoshi Masaki, Global behavior of solutions to mass-subcritical nonlinear Schrodinger equation, International workshop on PDEs and related topics in nonlinear problems (招待講演), 2014 年 2 月 11 日～2014 年 2 月 15 日, 広島大学(広島県・東広島市)

[6] 眞崎聡、L^2 劣臨界非線形シュレディンガー方程式における最小爆発解について、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会、2013 年 9 月 24 日～2013 年 9 月 27 日、愛媛大学(愛媛県・松山市)

[7] Satoshi Masaki, classical limit of quantum Euler equations, The second pacific rim mathematical association congress (招待講演), 2013 年 6 月 24 日～2013 年 6 月 28 日、上海市(中国)

[8] 眞崎聡、L^2 劣臨界非線形シュレディンガー方程式における最小非散乱解について、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会、2012 年 9 月 18 日～2012 年 9 月 21 日、九州大学(福岡県・福岡市)

〔その他〕
インターネットで公開中の論文

[1] S. Masaki and J. Segata, Existence of a minimal non-scattering solution to the mass-subcritical generalized Korteweg-de Vries equation, preprint, archived as arXiv:1602.05331.

[2] S. Masaki, On minimal non-scattering solution to focusing mass-subcritical nonlinear Schrodinger equation, preprint, archived as arXiv:1301.1741.

６．研究組織
(1)研究代表者

眞崎　聡（Masaki Satoshi）
広島大学・工学研究院・准教授
研究者番号：20580492