様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６８０
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７６００６４

研究課題名（和文）確率微分方程式に関する高精度数値計算法および精度保証法の確立とその応用

研究課題名（英文）Study of accurate numerical methods and verified computation relating to stochastic differential equations

研究代表者
田中　健一郎（TANAKA, Kenichiro）

武蔵野大学・工学部・准教授

研究者番号：７０６１０６４０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，確率過程の一種であるLevy過程に対し，その密度関数を解とするコルモゴロフの方程式に対する数値計算法を提案した．このためにFourier変換に基づいた数値計算法を構築した．具体的には，Fourier変換に対する二重指数関数型（DE）公式の不等間隔FFTによる高速化や，Sinc-Gauss関数近似公式に基づいた不定積分公式などを考案した．これらにより，FFTと同じオーダーの計算時間で高精度な数値解を得ることに成功した．

研究成果の概要（英文）：In this study, we proposed a numerical method for Kolmogorov's equations of Levy processes, which are popular stochastic processes. For this purpose, we designed numerical algorithms based on Fourier transform. More precisely, we accelerate the computation by the double exponential formula for Fourier transform using non-uniform FFT, proposed a numerical integration formula based on the Sinc-Gauss approximation formula, etc. By the proposed method, we succeeded in obtaining accurate numerical solutions of the Kolmogorov's equations in the time with the same order as that of FFT.

研究分野：数値解析学

キーワード：Levy過程　Kolmogorovの方程式　不等間隔FFT　Fractional FFT　Sinc-Gauss関数近似公式

１．研究開始当初の背景

確率過程を記述する方程式は，近年，金融数理を中心に応用が盛んであり，それらに対する数値計算法の需要も大きい．そのため，このような数値計算法の研究は数多く行われていたが，それらの計算精度にはまだ向上の余地があった上，計算精度を精密に評価する研究は少なかった．一方，日本を中心に発展している既存の高精度数値計算公式として，二重指数関数型数値積分公式（DE 公式）をはじめとする高性能な公式があり，これらに対しては理論解析から応用まで様々な研究がなされていた．そこで，確率過程を記述する方程式に関する数値計算に対して，これらの公式を応用した計算法を開発すれば，非常に有用であると考えられた．

２．研究の目的

確率過程を記述する方程式としては，まず確率微分方程式と呼ばれる方程式がある．これは確率変数を明示的に含む形の時間発展型の方程式であり，解が時間依存する確率変数として与えられる．一方，その解が持つ確率分布や，解の汎関数の期待値が満たす偏微分方程式を考えることもでき，これらはそれぞれコルモゴロフの前進／後退方程式と呼ばれる．

本研究では，後者のコルモゴロフの方程式に対する数値計算法を提案することを目的とした．より具体的には，確率過程の中でも Lévy 過程と呼ばれる一連の確率過程を対象とし，これらに対するコルモゴロフの方程式を対象とした．Lévy 過程とは，定常かつ独立な増分を持つ確率過程で，ブラウン運動などの基本的な確率過程を含み，様々な確率的現象のモデル化に用いられるものである．Lévy 過程は，オプションのような金融商品の価格付けを行う際の，原資産の価格過程のモデルとしてもよく用いられる．そのため，本研究では特に Lévy 過程を取り上げることにした．

３．研究の方法

まず Lévy 過程に対するコルモゴロフの前進方程式

$$p_t = Ap$$

を，空間を１次元空間 $\mathbf{R}$ とした場合について考えた．ここで A は線形作用素であり，この中には，Lévy 測度と呼ばれる測度に関する積分が含まれる．このような作用素を含む時間発展方程式に対して，本研究では，Fourier 変換に基づく数値計算法を考えた．その理由としては，Fourier 変換を用いた形で解が記述しやすくなることと，数値計算を行う際に高速 Fourier 変換（FFT）を利用した高速化が見込めることが挙げられる．また，金融数理の分野では，Carr，Madan（引用文献①）による Fourier 変換を用いた方法がよく知られており，ここでは特性関数が閉じた式で表せる確率過程について，オプションの価格計算が Fourier 変換に基づいて行われている．本研究ではこれを参考にして，特性関数が解析的に求まらない一般の場合について，コルモゴロフの前進方程式の解 p を数値計算する方法を考案した．

具体的な方法の大枠は以下のとおりである．まず方程式の両辺を Fourier 変換すると

$$[Fp]_t(\omega,t) = G(\omega)[Fp](\omega,t)$$

のように p の Fourier 変換に対する方程式が得られる．ここで $G(\omega)$ は作用素 A に対応する関数であり，Lévy 測度を含む積分で表される．以降は次のようにして p の数値解を得る．

⑴ $G(\omega)$ の内部に含まれる，$(0,\infty)$ 区間上の Fourier 変換を数値計算する．

⑵ ⑴の結果を用い，$G(\omega)$ の内部に含まれる不定積分を数値計算する．

⑶ ⑴⑵の結果と，方程式から得られる $[Fp]_t(\omega,t)$ の表示式を用いて，$(-\infty,\infty)$ 区間上の逆 Fourier 変換により p の数値解を求める．

本研究では，上記の(1)，(2)，(3)を実行するための数値計算法をそれぞれ開発した．これらの内容について，次の研究成果の節で述べる．

４．研究成果

本研究における成果の大部分は，次節の[雑誌論文]の①に記載されている．以下，まず前節の(1)，(2)，(3)のそれぞれに対して，研究成果の概要を記す．

(1)Fourier 変換に対する DE 公式による計算の高速化．

これは前節の(1)を実行するための数値計算法に関するものである．ここでは，大浦（引用文献②）による，Fourier 変換のための二重指数関数型（DE）公式を用いた．これ自体は既に確立されていたものだが，この公式では，積分を計算するための標本点をある規則にしたがって不等間隔にとる必要がある．そのため，そのままでは FFT を使用することができず，精度を上げようとすると計算時間が多くかかるようになってしまうという状況であった．

そこで本研究では，不等間隔格子上でも離散 Fourier 変換を FFT を用いて計算するために考案された不等間隔 FFT（引用文献③など）という手法をこの DE 公式に組み入れることを考えた．このことにより，DE 公式の精度をほぼ保ったままで，計算を高速化することに成功した．次の図１がその高速化の結果を示している．

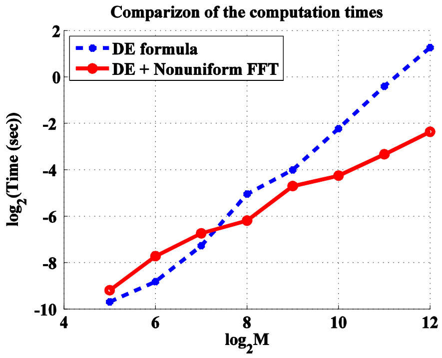

図１　通常の DE 公式と不等間隔 FFT と組み合わせた DE 公式との計算時間の比較

(2)Sinc-Gauss 関数近似公式に基づく数値不定積分公式の設計と，この公式による計算の高速化．

これは前節の(2)を実行するための数値計算法に関するものである．数値不定積分公式とは，不定積分

$$\int_0^x f(t)dt$$

を数値計算するための公式である．実際の数値計算では有限個の x についてこの値を計算すればよいので，定積分に対する数値計算公式を用いて一つずつ計算することは可能である．しかし，このような方法では，単純に台形公式を適用する場合は別として，高精度公式を適用する場合には手間がかかり，多くの x について計算を行う際には効率が悪い．不定積分のための数値計算公式を開発するのはこの効率を上げるためである．

本研究では，不定積分公式のもとになる関数近似公式として，Sinc-Gauss 関数近似公式（引用文献④）

$$f(t) \approx \sum_{k=\lfloor t/h \rfloor -N+1}^{\lfloor t/h \rfloor +N} f(kh)\mathrm{sinc}(t/h-k)\exp\left(-\frac{(t/h-k)^2}{2r^2}\right)$$

を用いた．この公式は，標本点間隔 h やパラメータ r を適切に設定することで，高い精度を実現する．この式の右辺を t に関して積分することで不定積分公式が得られる．本研究では，不定積分の値を計算する x としてはある等間隔格子点上の点を用いる．さらに，このとき sinc 関数と Gauss 核の積の積分を計算する必要があるが，これは Fourier 変換を用いると効率的に計算できることが分かっている．また，ある適切な工夫により，この計算にも FFT を適用することができ，計算の高速化に成功している．

(3)Fourier 変換に対する連続 Euler 変換を用いた高精度公式に対する理論解析と，この公式による計算の高速化．

これは前節の(3)を実行するための数値計算法に関するものである．Fourier 変換に対する高速・高精度公式は(1)でも考案しているが，ここでは別の公式を用いることとした．前節の方法の節に書いた通り，(1)とは積分区間の異なる Fourier 変換を扱うため，この場合に適した公式を用いようと考えたためである．

具体的には，大浦（引用文献⑤）による連続 Euler 変換を用いた公式を用いた．この公式については，[雑誌論文]の②において，詳細な理論解析を行っている．さらに本研究では，この公式を用いた計算を高速化するために，Fractional FFT（引用文献⑥）と呼ばれる高速化法を公式に組み込んだ．Fractional FFT は，Nyquist 条件が満たされない離散 Fourier 変換を FFT と同じオーダーの計算時間で実行するための方法である．

(4)数値計算結果の例．ここでは，以上の(1),(2),(3)で考案した方法を用いた実際の数値計算例を示す．用いた例は，
① Variance Gamma 過程
② Normal Inverse Gaussian 過程
の二つである。いずれも Lévy 過程の一種であり，それぞれ図 2,3 に示すような分布関数を持つ．ただし，簡単化のため，本研究ではいずれも対称なものに限定した．

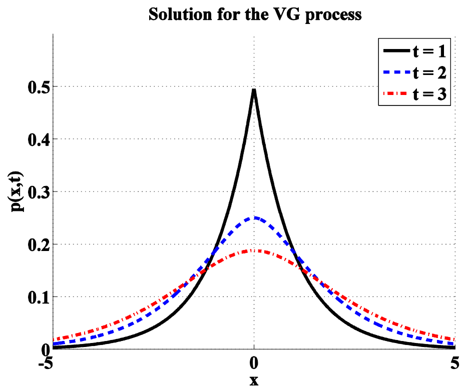

図２　Variance Gamma 過程の分布関数の例

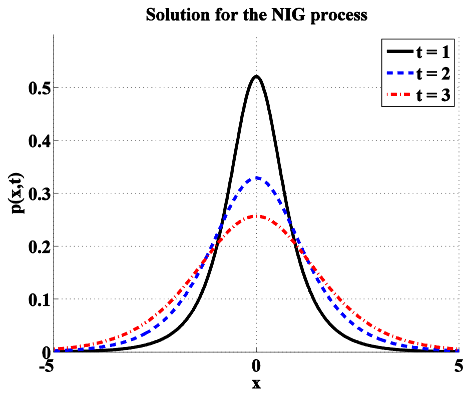

図３　Normal Inverse Gaussian 過程の分布関数の例

これらに対して，厳密解と本研究での提案手法による数値計算結果との誤差を計算すると次のそれぞれ図 4-9 のようになった．これらから，分布の中心付近の尖り具合が緩い場合は，計算に使用する標本点数 M に対する誤差が急激に減少していることが分かる．

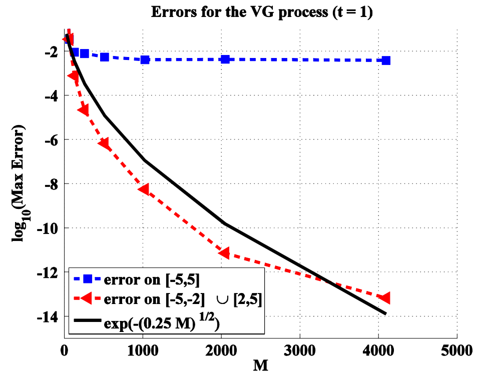

図 4 Variance Gamma 過程の $t=1$ の時の誤差

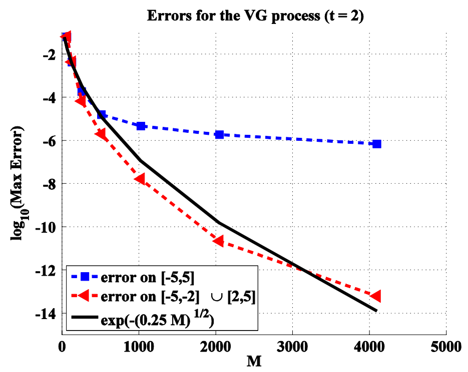

図 5 Variance Gamma 過程の $t=2$ の時の誤差

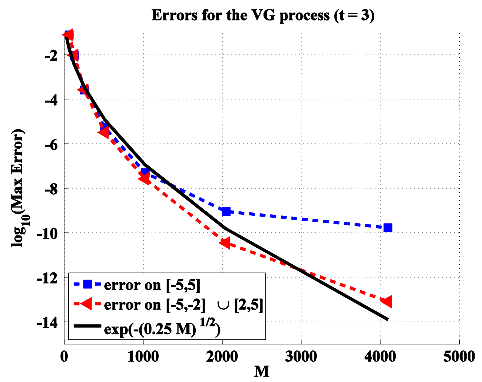

図 6 Variance Gamma 過程の $t=3$ の時の誤差

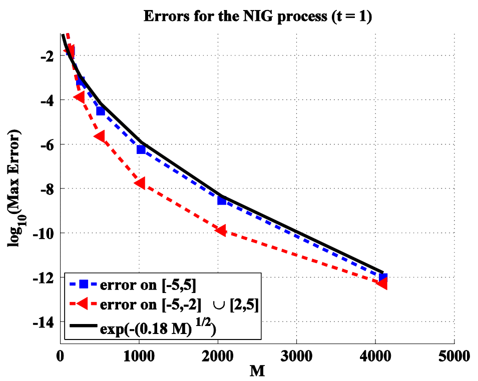

図 7 Normal Inverse Gaussian 過程の $t=1$ の時の誤差

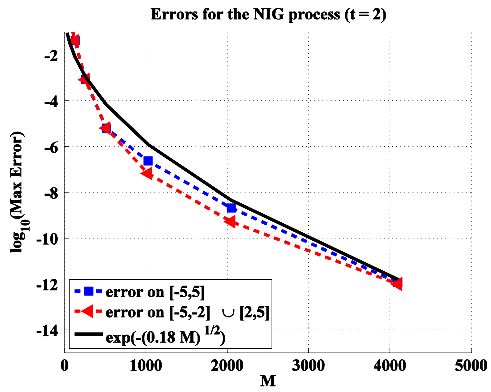

図 8 Normal Inverse Gaussian 過程の $t=2$ の時の誤差

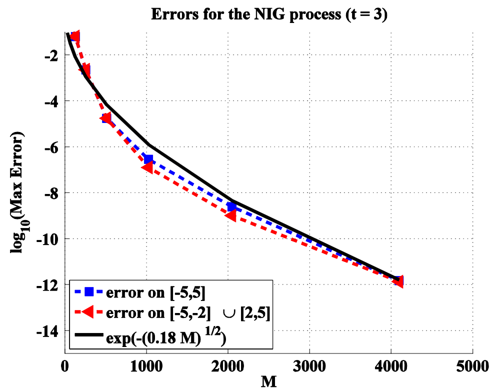

図 9 Normal Inverse Gaussian 過程の $t=3$ の時の誤差

また，計算時間を調べると図 10，11 のとおりであった（t による違いはほとんどないため，$t=3$ の時のみを示した）．他手法との比較は行っていないが，FFT を用いたことによる理論上のオーダー $O(M\log M)$ に概ね沿っているとみることができる．

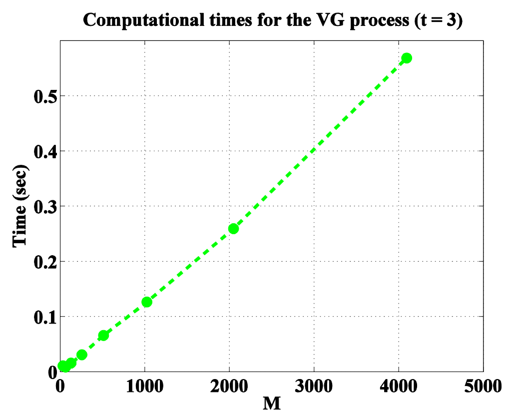

図 10 Variance Gamma 過程の計算時間

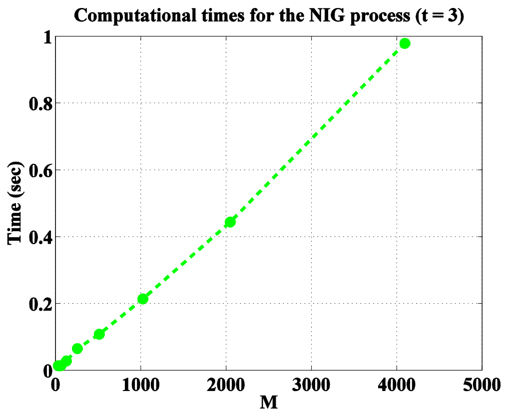

図 11 Normal Inverse Gaussian 過程の計算時間

(5)今後の課題．本研究で用いた公式の一部については理論的誤差解析ができているが，未完のものもある．そのため，公式中で用いたパラメータも最適な設定とは限らない．よって，完全な誤差解析に基づいて最適なパラメータを設定することが今後の課題の一つとなる．また，数値計算法の適用対象となる確率過程の範囲を広げることも今後視野に入れたいと考えている．

＜引用文献＞

① Carr, P. & Madan, D. B. (1999) Option valuation using the fast Fourier transform. J. Comput. Finance, 2, 61-73.

② Ooura, T. (2005) A double exponential formula for the Fourier transforms. Publ. RIMS Kyoto Univ., 41, 971-977.

③ Greengard, L. & Lee, J. Y. (2004) Accelerating the nonuniform fast Fourier transform. SIAM Rev., 46, 443-454.

④ Tanaka, K., Sugihara, M. & Murota, K. (2008) Complex-analytic approach to the sinc-Gauss sampling formula.Japan J. Indust. Appl. Math., 25, 209-231.

⑤ Ooura, T. (2001) A continuous Euler transformation and its application to Fourier transform of a slowly decaying function. J. Comput. Appl. Math., 130, 259-270.

⑥ Bailey, D. H. & Swarztrauber, P. N. (1991) The fractional Fourier transform and applications. SIAM Rev., 33, 389-404.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① Ken'ichiro Tanaka: A fast and accurate numerical method for the symmetric Lévy processes based on the Fourier transform and sinc-Gauss sampling formula, IMA Journal of Numerical Analysis (2015), published online, doi:10.1093/imanum/drv038. 査読有

② Ken'ichiro Tanaka: Error control of a numerical formula for the Fourier transform by Ooura's continuous Euler transform and fractional FFT, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 266 (2014), pp. 73-86. 査読有

③ Ken'ichiro Tanaka: A new method for fast computation of cumulative distribution functions by fractional FFT, JSIAM Letters, Vol. 5 (2013) pp. 57-60. 査読有

〔学会発表〕（計１１件）

① Ken'ichiro Tanaka: A fast and accurate numerical method for the symmetric Lévy processes based on the Fourier transform and sinc-Gauss sampling formula, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2015), Beijing (China), Aug. 11, 2015.

② 田中健一郎： 対称 Lévy 過程に対する高速高精度数値計算法， 2014 年度 応用数学合同研究集会， 龍谷大学 瀬田キャンパス（滋賀県大津市），2014 年 12 月 18 日.

③ 田中健一郎：Sinc-Gauss サンプリング公式と FFT を用いた高速数値不定積分， 第 43 回数値解析シンポジウム，ホテル日航八重山（沖縄県石垣市），2014 年 6 月 12 日.

④ 田中健一郎：Sinc-Gauss サンプリング公式を用いた高速グリッディングとその応用，第 10 回 日本応用数理学会 研究部会・連合発表会，京都大学（京都府京都市），2014 年 3 月 19 日.

⑤ 田中健一郎： Fourier 変換の高精度計算公式の誤差制御とその放物型方程式への応用． 日本応用数理学会 2013 年度年会，アクロス福岡(福岡県福岡市),2013 年 9 月 11 日.

⑥ 田中健一郎： Fourier 変換に対する高精度数値計算公式の誤差制御． 第 42 回数値解析シンポジウム，道後舘（愛媛県松山市），2013/06/12 - 2013/06/14.

⑦ 田中健一郎： FFT を用いた実軸全体における分布関数の高速高精度計算， 日本応用数理学会 2013 年度 研究部会 連合発表会，

東洋大学 白山キャンパス（東京都文京区），
2013/03/14 - 2013/03/15.

６．研究組織
(1)研究代表者
田中 健一郎（TANAKA, Ken’ichiro）
武蔵野大学 工学部 数理工学科 准教授
研究者番号：７０６１０６４０

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：