様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 9 月 25 日現在

機関番号： 32613
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号： 24760342

研究課題名（和文） 制御系設計における行列ランク最小化手法の研究

研究課題名（英文） Matrix rank minimization algorithm for control system design

研究代表者
小西　克巳（Konishi, Katsumi）

工学院大学・情報工学部・准教授

研究者番号：20339138

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，行列ランク最小化問題を扱い，効率良く近似解を与える手法を提案した．同問題は多くの制御系設計問題を含む問題であるが，NP困難な問題である．本研究では，設計変数行列の零空間に着目したNull Space based Alteranating Optimization (NSAO)法と，特異値分解に基づくアルゴリズムIterative Partial Matrix Shrinkage (IPMS) 法の２種類の方法を提案した．両者ともに他の手法に比べて効率良く低ランク解を与えることが数値例により確認されている．IPMS法は大規模問題に対応可能であるという特徴がある．

研究成果の概要（英文）：This work dealt an algorithm for the matrix rank minimization problem, which is NP hard in general while it has a lot of applications, and has proposed null space based alternating optimization (NSAO) algorithm and iterative partial matrix shrinkage (IPMS) algorithm. Numerical examples show that both algorithms provide low-rank solutions efficiently and that IPMS algorithm can be applied to huge size problems.

研究分野： 制御理論

キーワード： 行列ランク最小化　スパース最適化　制御系設計　システム同定

１．研究開始当初の背景

数理計画問題の一種に行列ランク最小化問題と呼ばれるがある．ある凸制約下で設計変数となる行列のランクを最小化するような問題である．この問題は，制御系同定におけるモデル次数の低次元化，次数推定，データマイニングで利用される協調フィルタリング，画像修復や動画像修復，ハイブリッドシステムの同定問題，画像のセグメンテーション問題などの多くの問題へ応用されている．しかしながら，行列ランク最小化問題は組合せ的な難しさを含み，一般には NP 困難な問題であるため，短い時間で厳密解を求めることは難しい．いくつかの発見的手法，例えば，行列の核ノルム(nuclear norm)最小化に基づく方法, PF アプローチ, SVT(singular value thresholding)アルゴリズム，定点反復法に基づくアルゴリズムなどが提案されている．行列の核ノルムが行列ランクの良い下界を与えることが示され，さらに，核ノルム最小化問題が凸最適化問題であることから，多くの手法は行列の核ノルム最小化問題に基づいて低ランク解を導出する手法を与えている．しかしながら，問題が難しい問題であるときに低ランク解を与えないことや，問題規模が大きくなったときに計算時間が膨大になるという問題がある．また，核ノルム最小化では特異値の和を最小化するため，信号修復問題に適用すると，信号全体のエネルギーが小さくなり，正しく信号が修復されないという問題がある．そこで，これらの問題を解決する手法が望まれている．

２．研究の目的

本研究では、以下のような行列ランク最小化問題の解法を与えることを目的とする．

$$\text{Minimize } \mathbf{rank} X \quad \text{subject to } X \in \Omega$$

X は行列であり，上記問題の設計変数である．集合 Ω は変数 X に対する制約を表し，一般には凸集合であることが多い．本研究では，特に制御系設計問題における行列ランク最小化問題について研究し，効率の良い解法を与えることを目指す．

３．研究の方法

行列ランク最小化問題を解く数値解法として，核ノルム最小化問題の解法である内点法に基づくアルゴリズムではなく，高速に解くことができる繰り返しアルゴリズムの導出を行う．さらに，GPU コンピューティングを利用した並列計算アルゴリズムを導出する．

４．研究成果

行列ランク最小化問題を解く手法として，NSAO(null space based alternating optimization)法と，IPMS(iterative partial matrix shrinkage)法の２つの方法を導出した．

NSAO 法はランク最小化問題を解く代わりに，以下の問題を解く手法である．

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \|XW\|_F^2 + \gamma \|W\|_F^2 \\ \text{subject to} & X \in \Omega \end{array}$$

この問題はランク最小化問題の良い近似解を与える．行列 W は行列 X の零空間行列に対応し，この零空間行列のランクを最大にするように最適化することで行列 X のランクを最小化する問題である．同問題は，非凸最適化問題であるが、図１のような繰り返し計算により効率良く解くアルゴリズムを提案した．GPU コンピューティングを利用した並列計算化が容易なアルゴリズムで，GPU 上に実装することで高速化可能であることを確認している．

Input: $X \in \boldsymbol{R}^{m \times n}, \gamma, \eta$
　repeat
　　$D_\Phi \leftarrow \gamma W + X^T X W;\ F_\Phi \leftarrow P_\Phi(W - 2D_\Phi) - W$
　　$\alpha_\Phi \leftarrow -\mathbf{Tr}(D_\Phi F_\Phi) / \|X^T F_\Phi\|_F^2$
　　$W \leftarrow W + \alpha_\Phi F_\Phi$
　　$D_\Omega \leftarrow X W W^T;\ F_\Omega \leftarrow P_\Omega(X - 2D_\Omega) - X$
　　$\alpha_\Omega \leftarrow -\mathbf{Tr}(D_\Omega^T F_\Omega) / \|F_\Omega W\|_F^2$
　　$X \leftarrow X + \alpha_\Omega F_\Omega$
　　$\gamma \leftarrow \gamma / \eta$
　until termination criterion is satisfied
Output: low-rank solution X

図１．NSAO 法

上記の NSAO 法は，問題のサイズが大きくなるとメモリ使用量が膨大になるという欠点がある．特に GPU 上に実装する場合は，メモリ容量と,CPU と GPU 間での通信の増大から，メモリ使用量が計算高速化へのネックとなる．そこで本研究では，メモリ使用量を大幅に削減可能な IPMS 法を提案した．IPMS 法は，特異値分解に基づくアルゴリズムで，図２に示す Algorithm 1 と図３に示す Algorithm 2 から構成されるアルゴリズムである．

Algorithm 1. Iterative partial matrix shrinkage (IPMS).
Input: X^0, δ_0, ε, η_δ,
　$k \leftarrow 0$.
　$\delta \leftarrow \delta_0$.
　while not converge **do**
　　repeat
　　　$[U^k, \sigma_1^k, \sigma_2^k, \ldots, \sigma_m, V^k] \leftarrow \mathrm{SVD}(X^k)$.
　　　$r^k \leftarrow$ given rank r or estimated by Algorithm2
　　　$\lambda^k \leftarrow \delta \sigma_{r^k}^k$.
　　　$Y^{k+1} \leftarrow \mathcal{T}_{r^k,\lambda^k}(X^k)$.
　　　$X^{k+1} \leftarrow Y^{k+1} - \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(Y^{k+1}) - \boldsymbol{b})$.
　　　$k \leftarrow k+1$.
　　until $\|X^{k+1} - X^k\|_F / \|X^k\|_F < \varepsilon$
　　$\delta \leftarrow \delta / \eta_\delta$.
　end while
Output: low-rank solution X^k

図２．IPMS 法（Algorithm 1）

Algorithm 2. Rank estimation algorithm for IPMS.

Input: $k, \sigma_1^k, \sigma_2^k, \ldots, \sigma_m^k, \alpha_0, \alpha_{min}, \eta_\alpha$
$\alpha \leftarrow \max(\alpha_0/(\eta_\alpha)^{k-1}, \alpha_{min})$
$r \leftarrow \arg\max_i \sigma_i^k$ subject to $\sigma_i^k \geq \alpha\sigma_1^k$.
Output: estimated rank r

図３．IPMS 法 (Algorithm 2)

Algorithm 1 は，行列 X の特異値のうち主要でない特異値の和を減らすアルゴリズムである．具体的には，主要でない特異値から小さい値を引き算し，主要でない特異値の和の劣微分方向に更新することによって，特異値の和を減少させている．ただし，制約条件を満たす必要があるため，制約条件を満たす平面に射影しながら更新を行うアルゴリズムである．Algorithm 1 では，特異値のうち，どの特異値が主要な特異値で，どの特異値が主要でない特異値であるかを知る必要がある．そこで，Algorithm 2 により，どの特異値が主要であるかを推定している．この２つのアルゴリズムにより，IPMS 法は行列ランク最小化問題を解いている．

本研究最大の成果として，IPMS 法は行列ランク最小化問題のλ近似解と呼ばれる解を与えるか，以下の問題の局所最適解を与えることを示した．

$$\min_{Y \in \boldsymbol{R}^{m \times n}} \lambda \|Y\|_{*,r} + \frac{1}{2}\|\mathcal{A}(Y) - \boldsymbol{b}\|_2^2.$$

λ近似解とは，得られた解の０でない特異値のうち，λ以下の特異値を０に丸めたとき，最適解を一致するような解のことである．
IPMS 法における特異値分解は，乱数を用いた近似計算を利用することが可能であり，同手法は大規模な問題に対しても適用可能なアルゴリズムである．数値実験により，他の手法に比べて難しい問題を解くことと，高速に解けることを示した．また，メモリ 1TB の PC を利用することで，1,000,000×10,000 の行列に対する行列完成問題が解けることを示した．

本研究では，上記の提案手法を制御系の同定問題，画像修復問題，動画像修復問題に適用した．それぞれの応用事例において，既存手法よりも良い結果が得られることを示した．また，それぞれに適するように修正した手法も提案した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① T. Takahashi, K. Konishi, and T. Furukawa, “Block Adaptive Algorithm for Signal Declipping Based on Null Space Alternating Optimization,” IEICE Transaction on Information and Systems, vol. E98-D, no. 1, pp. 206-209, 2015

② K. Konishi, K. Uruma, T. Takahashi and T. Furukawa, “Iterative Partial Matrix Shrinkage Algorithm for Matrix Rank Minimization,” Signal Processing, vol. 100, pp. 123-131, 2014

③ 高橋 智博, 小西 克巳, 古川 利博,“構造化行列のランク最小化に基づく画像修復法”,電子情報通信学会論文誌,Vol. J96-D, vol. 7, pp. 1606-1617, 2013

④ K. Konishi, “Sequential Matrix Rank Minimization Algorithm for Model Order Identification,” IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, Vol. 95-A, no. 10, pp. 1788-1791, 2012

〔学会発表〕（計１０件）

① K. Konishi, “Multiple Low Rank Matrix Approach to Switched Autoregressive Exogenous System Identification,” Proc. of 10th Asian Control Conference, 2015

② 小西克巳,“行列ランク最小化に基づく区分的アフィンシステム同定手法”，第 57 回自動制御連合講演会, 2014 年 11 月

③ 小西克巳,“行列ランク最小化に基づく一般化主成分分析手法とシステム同定への応用”,第 56 回自動制御連合講演会，2013 年９月

④ T. Takahashi, K. Konishi and T. Furukawa, “Hankel Structured Matrix Rank Minimization Approach to Signal Declipping,” Proc. of European Signal Processing Conference, 2013

⑤ K. Konishi, “Low-Rank and Sparse Optimization for GPCA with Applications to SARX System Identification,” Proc.

of European Control Conference, pp. 2687-2692, 2013
⑥ T. Takahashi, K. Konishi and T. Furukawa, "Matrix Rank Minimization to Sequential Signal Denoising based on Iterative Null Space," Proc. of RISP International Workshop on Nonlinear Circuits, Communications and Signal Processing, pp. 5-8, 2013
⑦ K. Konishi, "Sequential Matrix Rank Minimization Approach to Signal Recovery Based on Subspace System Identification," Proc. of IEEE Muti-Conference on Systems and Control, pp.996-1001, 2012
⑧ T. Takahashi, K. Konishi and T. Furukawa, "RANK MINIMIZATION APPROACH TO IMAGE INPAINTING USING NULL SPACE BASED ALTERNATING OPTIMIZATION," Proc. of IEEE International Conference on Image Processing, pp. 1717-1720, 2012
⑨ T. Takahashi, K. Konishi and T. Furukawa, "Structured Matrix Rank Minimization Approach to Image Inpainting," Proc. of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems, pp. 860-863, 2012
⑩ 小西克巳, "行列ランク最小化問題のための Accelerated IRLS 法", 第 41 回制御理論シンポジウム, 2012 年

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0件)

○取得状況(計 0件)

６．研究組織
(1)研究代表者
小西 克巳 (KONISHI KATSUMI)
工学院大学・情報工学部・准教授
研究者番号：21760337