

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 23 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24760344

研究課題名(和文) 確率近似法の停止則

研究課題名(英文) Stopping rules for stochastic approximation

研究代表者

和田 孝之 (Wada, Takayuki)

大阪大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：60599207

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：未知方程式の解を雑音が含まれる残差から求める逐次解法である確率近似法について、事前情報のみを用いた停止則の構成が可能かについて研究をおこなった。具体的には、アルゴリズムが出力する解の推定値の確率的な精度を任意に指定するとき、精度とそれを達成するために必要な反復回数との関係を具体的に示した。アルゴリズムの実行前に必要な反復回数分かることは実用上の意味から有用であるだけでなく、この停止則を用いる場合の確率近似法で実行される反復回数と問題サイズとの関係、つまり確率近似法の計算複雑さに対する精密な知見も与えている。

研究成果の概要(英文)：We have investigated stopping rules of stochastic approximation, which is a recursive procedure to find the solution to an unknown nonlinear equation via noisy measurements. In fact, we have shown that there is a high probability that the distance between the exact solution and the candidate solution is less than a specified tolerance level when the stochastic approximation stops according to our stopping rule. From our stopping rules, we can know the necessary number of recursions in advance. Furthermore, since the number of recursions required by the stopping rule is a polynomial function of the problem size, this result also provides detailed analysis of the computational complexity of stochastic approximation.

研究分野：制御工学

キーワード：制御工学 数理工学 アルゴリズム 確率近似法

1. 研究開始当初の背景

確率近似法[1]は、未知方程式の解を、雑音が含まれる残差から求める逐次解法である。このアルゴリズムは、自己回帰モデルのパラメータ推定や非線形フィルタリングの実時間解法にも利用されるなど応用範囲の広いアルゴリズムであり、その性質や応用に関する様々な研究がなされてきた。特に最近ではマルチエージェント系の合意問題への応用や、分散最適化の基本的なアイデアとして用いられている。確率近似法に関する従来研究の多くは、アルゴリズムにより逐次得られる解の推定値が真の解に収束する十分条件の導出に関心が払われており、種々の十分条件が提案されている。

しかし、様々な実問題への応用を考えると、収束性のみならず、何回反復すれば収束したとみなせるかという停止則も重要である。ところが、研究開始当初には、この情報の有用性にもかかわらず、この点を研究した例はそれほど多くはない。たとえば、解の推定誤差の分布を(最終的に正規分布に収束するので)正規分布とみなし、方程式の残差の観測値より誤差共分散を推定して、停止基準を与える提案[2]や、確率近似法の更新則を限定した上で、方程式の残差の観測値が観測ごとに正負反転するときに停止する方法[3]が提案されている。このように、確率近似法の停止則に関する従来研究は、アルゴリズムの実行中に得られる方程式の残差の観測値、つまり事後情報を用いるものであり、事前情報のみに基づいて反復すべき回数を与えるものではない。そこで、本研究では事前情報のみに基づいて確率近似法の停止則の構成を試みた。

- [1] H. Robbins and S. Monro
A Stochastic Approximation Method
The Annals of Statistics, 22, 400-407, 1951
- [2] G. Yin,
A stopping rule for Robbins-Monro method,
Journal of Optimization Theory and Applications, 67, pp.151-173, 1990
- [3] G.C. Pflug,
Non-asymptotic confidence bounds for stochastic approximation algorithms with constant step size,
Monatshefte für Mathematik, 110, pp.297-314, 1990

2. 研究の目的

本研究では、確率近似法について、事前情報のみを用いた停止則について研究をおこなった。具体的には、アルゴリズムが出力する解の推定値の確率的な精度を任意に指定するとき、精度とそれを達成するために必要な反復回数との関係を具体的に示した。この結果は実用上の意味から有用であるだけでなく、この停止則を用いる場合の確率近似法で実行される反復回数と問題サイズとの関係、つまり確率近似法の計算複雑さに対する精密な知見を与えてくれる。

3. 研究の方法

本研究の最終的な目標は、反復解法である確率近似法に対して、事前情報のみを用いて何回反復計算を行うと、所望の精度の解が得られるかを明らかにすることである。研究開始時に萌芽的な研究成果として線形方程式を対象とする確率近似法に対する停止則は得られている[4]。キーとなるアイデアは更新則を具体的に書きくさし、雑音によって駆動される状態方程式を導出することにある。これをもとに、解の候補の挙動を具体的に解析をおこなった。そこでのアイデアを展開し、

- ・最適化問題を取り扱う有限差分確率近似や同時摂動確率近似法

- ・平均化を用いる確率近似法

- ・非線形方程式

へと適用した。

[4] 和田孝之、井浜崇充、藤崎泰正、
線形確率近似法に対する停止則、
システム制御情報学会論文誌、25-2、
pp. 39-44、2012

4. 研究成果

本研究課題の遂行を通して得られた研究成果を以下の様にまとめる。

1) 最適化問題に対する確率近似法の停止則

はじめに設定した課題は確率近似法の中で最適化問題を解くために用いられる有限差分確率近似法に対して停止則の構成を試みた。ここでの問題設定では、目的関数の具体的な形は未知であるものの、決定変数の値を指定するとそこでの目的関数の値が雑音を含んだ形で与えられるというものである。通常の未知方程式の解を求める場合は、方程式の残差より、今の解の候補がどれほど解から離れているかを知ることができるが、この場合、事前に最適値を知ることができないため、それはあてはまらない。そこで目的関数の値を決定変数の要素ごとにすこしずつらして観測をおこなう。これらの情報をもとに、目的関数の勾配を推定し、それをもとに解の更新を行うのが有限差分近似確率近似法である。有限差分確率近似法を凸二次関数最小化問題を対象とする場合に停止則を構成し、学会発表⑥にて発表を行った。従来研究において、反復回数を十分多くした場合の収束速度は得られており、そこでの結果と今回得られた結果を比較したところ、同じ結果が得られていることが確認できた。また、有限差分確率近似法を改良した同時摂動確率近似法についても停止則を構成した。同時摂動確率近似法は勾配の推定にも乱数を用いることで目的関数の値を観測する回数を減らすことができる手法である。このアルゴリズムについても停止則の構成が可能であることを確認し、学会発表⑤⑧にて発表を行った。この研究を行った結果、同時摂動確率近似法の過渡的な性能も明らかにした。その結

果として、観測雑音から得られる影響の反復回数に対する減衰速度は有限差分確率近似法と同じであることを確認した。一方、与えた初期解の誤差の減衰速度は有限差分確率近似法より遅くなることが分かった。また、これらの結果を一般化し、適用可能な関数のクラスを広げた結果も導出しており、現在、雑誌論文に投稿中である。また、特別な場合として、観測雑音が生じないかわりに制約条件の数が有限個ではない可解問題に対して停止則を構成可能かの検討を行った。設定した問題は複数のパラメータに依存する制約条件があり、すべてのパラメータについて制約条件を満足する決定変数を求める問題である。ここでは、各パラメータについて複数の制約条件が存在するとうい構造を利用してより効率的な解法を考え、それに対する停止則を導出した。結果については学会発表③で発表した。同様の問題設定を観測雑音が存在する場合に拡張できないかについて今後検討していく。

2) 平均化を用いる確率近似法の停止則

確率近似法の性能はステップサイズに大きく依存することが知られている。しかし、適切なステップサイズを選択することは、解くべき方程式の詳細な情報が必要であるが、一方、解くべき方程式の形は未知であるという問題設定があるためステップサイズを適切に設定することは簡単な問題ではない。この問題を解決するための方法として、解候補の系列の平均化を用いる方法が提案されている。この方法を用いると、反復回数が十分大きいときの収束速度がステップサイズの設定と関係なく理論的に最も早い速度が達成できることが知られている。この平均化を用いる確率近似法についても停止則の構成が可能かを検討した。ステップサイズを定数と選んだ場合について、線形方程式を対象とした場合に停止則を構成することができた。この結果は、学会発表⑦にて発表を行った。また、最適化問題を対象とした場合についても同様に平均化を用いる確率近似法の停止則を構成可能か検討した。凸二次関数最小化問題を対象として検討を行った結果、同様に停止則を導出することができた。結果については学会発表①にて発表している。どちらの場合も、平均化を用いない場合に達成可能な収束速度の中で最良の性能を過渡的な意味でも達成していることを確認した。これらの結果は、どちらも線形方程式の求解や凸二次関数最小化のように簡単なクラスを対象としている。現在この結果をより一般的なクラスの問題へ拡張する問題は未解決であり、現在、研究を行っているところである。

3) 非線形方程式に対する確率近似法の停止則

確率近似法は本来、未知の非線形方程式を解くことができる点が長所である。それに對

し、研究開始前に得ていた萌芽的な研究成果では、理論的な展開を簡単にするため、あえて線形方程式に話題を限定し、停止則の導出を行っていた。そこで、この結果を非線形方程式を対象とする確率近似法への拡張を試みた。対象とする非線形方程式が微分可能な関数である場合に、その勾配がある種のセクタ条件(勾配の誘導ノルムが常にある一定範囲に収まっている)を満足する場合に停止則を構成することが可能であることを明らかにした。この結果については、雑誌論文へ投稿を行った。現在、審査中であるものの、その審査の過程において、理論の不備が見つかり、その問題に対する修正をおこなった。修正後の停止則は解の候補が未知方程式の解へ二乗平均収束することを示し、その二乗平均誤差の値を指定したときに、アルゴリズムを何回反復するべきか明らかにするタイプの停止則となっている。修正後の結果については学会発表②において発表を行った。

以上のように学会発表8件を通して本研究課題を通して得られた確率近似法の停止則についての研究成果について、公表を行った。またこれらの結果は雑誌論文へも投稿中である。しかし、未解決の問題も残っている。平均化を用いる確率近似法においては、非線形方程式を対象とする場合の停止則の構成法について、未解決であるので今後研究を続ける予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計8件)

① Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki,
Stochastic Gradient Methods with Averaging,
SICE International Symposium on Control Systems 2015 (Part of the 2nd Multi-symposium on Control Systems: MSCS 2015),
Tokyo, Japan, 613-3 (2015.3)

② 和田孝之、藤崎泰正、
非線形多次元確率近似法の停止則、
第57回自動制御連合講演会、
pp.2060-2063、伊香保、群馬 (2014.11)

③ Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki,
Probabilistic Analytic Center Cutting Plane Methods with Multiple Cuts,
Proceedings of European Control Conference 2014,
pp. 2198-2203, Strasbourg, France,
(2014.06)

④ 和田孝之、藤崎泰正、
平均化を用いる確率最適化、
第 58 回システム制御情報学会研究発表講演
会講演論文集、
332-3、京都、京都、(2014.05)

⑤ Takayuki Wada and Yasumasa
Fujisaki,
A Stopping Rule for Simultaneous
Perturbation Stochastic Approximation,
Proceedings of European Control
Conference 2013,
pp. 644-649, Zurich, Switzerland (2013.7)

⑥ Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki
A Stopping Rule for Finite-Difference
Stochastic Approximation,
The 44nd ISCIE International Symposium
on Stochastic Systems Theory and Its
Applications,
pp.144-147, Tokyo, Japan (2013.5)

⑦ 和田孝之、藤崎泰正、
平均化を用いる確率近似法の停止則、
第 57 回システム制御情報学会研究発表講演
会講演論文集、
331-3、神戸、兵庫 (2013.05)

⑧ 和田孝之、藤崎泰正、
同時摂動確率近似に対する停止則、
第 41 回制御理論シンポジウム、
葉山、神奈川 (2012.09)

[その他]

ホームページ等

<http://www-door.ist.osaka-u.ac.jp/wada/wada-j.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和田 孝之 (WADA Takayuki)
大阪大学・大学院情報科学研究科・助教
研究者番号：60599207

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし