科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 5 月 30 日現在

機関番号：11501
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：24840005

研究課題名（和文）非線形差分方程式の既約性と解の超超越性の研究

研究課題名（英文）Irreducibility and hypertranscendence of non-linear difference equations

研究代表者
西岡　斉治（Nishioka, Seiji）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：10632226

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,000,000円、（間接経費）　600,000円

研究成果の概要（和文）：離散パンルヴェ方程式と呼ばれる特別な２階代数的差分方程式がある。その一種であるD7(1)型ｄパンルヴェ方程式の既約性を証明した。２階代数的差分方程式が既約であるとは、超越関数解が差分体の分解可能拡大に属さないということである。既約性から、超越関数解が線形差分方程式の解や１階代数的差分方程式の解により代数的に表現できないことが導かれる。また、差分リッカチ方程式の差分の変換によらない標準形を導出した。

研究成果の概要（英文）：There are special second-order algebraic difference equations called discrete Painleve equations. The equation called d-Painleve equation of type D7(1) is one of them. Its irreducibility in the sense of decomposable extension was proved. The irreducibility implies that the transcendental function solution cannot be built from rational functions by reiterating algebraic operations and the taking of solutions of linear difference equations or first-order algebraic difference equations. A standard form of difference Riccati equations for any transforming operator was also studied.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：離散パンルヴェ方程式　既約性　超越性　代数的差分方程式

１．研究開始当初の背景

(1)差分方程式の既約性

微分方程式で定義される新しい超越関数を発見すること。１９世紀末、これを目的としてパンルヴェ（常微分）方程式が定義された。P. Painlevé の言う新しい関数とは、線形常微分方程式の解やアーベル関数で表示できない関数のことである。また、それらで表示できる関数は梅村の古典関数と呼ばれる。パンルヴェ方程式は２階非線形代数的微分方程式で、６つの型に分類される。それらが実際に新しい関数を定義することが証明されたのは、２０世紀末になってからのことであった。パンルヴェ方程式の既約性と呼ばれる問題である。この問題は１９８８年の西岡啓二によるパンルヴェＩ型方程式の既約性の証明を皮切りに、梅村、岡本、野海、渡辺、その他多くの研究者の努力の末、２１世紀に入りようやく完全に解決した。なお、問題の定式化には微分代数が用いられた。

一方、１９９０年代、B. Grammaticos、A.Ramani 等によりパンルヴェ方程式の離散版が相次いで提示された。離散パンルヴェ方程式と呼ばれる差分方程式群である。その後、２００１年に坂井により幾何的観点から離散パンルヴェ方程式の分類がなされた。遡って、１９９８年、同氏により離散パンルヴェ方程式の既約性の問題が提示されている。私は２００９年の論文で、差分代数を用いることでこの問題の定式化を行い、その後２１種のうち３種の離散パンルヴェ方程式の既約性を証明していた。ただし、その３種はいずれもｑパンルヴェ方程式と呼ばれるグループ（１１種）に属す方程式であり、もう一つの大きなグループであるｄパンルヴェ方程式群（９種）の既約性は手つかずのままであった。

(2)差分方程式の解の超超越性

１８８７年のO. Hölder によるガンマ関数の超超越性の研究に代表されるように、差分方程式の解が代数的微分方程式をみたすか、という問題がある。この問題は古くから研究されているが､近年C. Hardouin とM. F. Singer により新たな理論が構築された。彼らの理論は線形差分方程式のガロワ理論に基づくものである。しかし１階有理的差分方程式や離散パンルヴェ方程式は一般に線形ではなく、それらの解の超超越性を扱う手段は乏しい。

２．研究の目的

(1)差分方程式の既約性

６種のパンルヴェ常微分方程式の既約性は一つ一つ地道に証明された。離散パンルヴェ方程式の場合も同様にせざるを得ないとすると、数が多いので大変である。本研究では、離散パンルヴェ方程式の形が一部の複雑なものを除き３パターンであることに着目し、それぞれのパターンに対して汎用的な補題を作ることで、証明手法の体系化を目指す。特に、ｑパンルヴェ方程式では現れない二つのパターンについては、得られた補題を用いて、ｄパンルヴェ方程式の既約性を実際に証明する。

(2)差分方程式の解の超超越性

将来的には離散パンルヴェ方程式の解の超超越性を研究したいが、現在は線形でないというだけで道具に困る状況である。離散パンルヴェ方程式は２階の方程式だが、まずは1階の方程式を対象として理論構築を図る。具体的には差分リッカチ方程式の解の超超越性を研究する。ただし差分の変換は通常の＋δだけでなく、独立変数をｑ倍するｑ差分や独立変数を２乗などするマーラー型も含む一般的なものとする。

３．研究の方法

本研究の目的を達成するためには、１００年以上前の文献から最新の研究まで、幅広く文献や情報を収集する必要があった。文献に関しては山形大学で入手できないものが多く、他大学において収集することとなった。例えば、超超越性は１９００年ごろには比較的活発に研究されていたようで、非線形差分方程式を扱っている論文も存在する。線形、非線形を問わずそれらを収集する必要があったが、当時の論文誌は発行が大学設置前であるためか山形大学には所蔵されていない。他大学における文献収集の機会には、差分代数や微分代数にこだわらず、ガロワ理論のような関連すると思われる様々な論文の発見、収集に努めた。また、研究対象である離散パンルヴェ方程式やその元であるパンルヴェ常微分方程式に関連する研究を理解することは既約性証明における技術的課題を解決するために役立つであろうと考え、パンルヴェ方程式に関連する研究集会に参加した。例えば関数方程式論サマーセミナーや昨年秋のストラスブール（フランス）での研究集会はそのような研究集会である。

研究成果の一つである D7(1)型ｄパンルヴェ方程式の既約性を証明するにあたって、解がみたす可能性のある１階代数的差分方程式を特定するために２変数多項式の係数比較を行った。この多項式は次数が特定されず係数が多量であった。そのため数式処理ソフトを用いて低次数の場合にどのような結果が導かれるかを実験・観察し、その結果を踏まえて一般の次数における結論を得ることができた。

４．研究成果

(1)離散パンルヴェ方程式の一種であるD7(1)型ｄパンルヴェ方程式の既約性を証明した。この方程式は既存の研究対象とは２つの点で異なる。第一に、独立変数を＋δずらす通常の差分に関する差分方程式である。第二に、方程式の形の特徴が技術的な観点で異なる。まず次のような結果が得られた。L を

差分体、ｆを解、Ｌとｆで生成される差分体をＮとする。このとき差分拡大 N/L の超越次数は１ではない。超越次数は方程式の階数に対応するため、解ｆが１階代数的差分方程式をみたすなら解ｆは係数体Ｌ上代数的でなければならないことがわかる。同種の議論はパンルヴェ常微分方程式の既約性証明においても現れ、そこではインヴァリアント・ディヴァイザーが無い、と表現されることがある。２階代数的差分方程式に対しては、既約性は分解可能拡大に超越関数解が属さないことにより定義される。解ｆが分解可能拡大に属すということは、係数拡大と１階代数的差分方程式の解を積み上げていくことによって解ｆに到達することができるということである。上述の補題により D7(1)型ｄパンルヴェ方程式の超越関数解ではこのようなことは起こりえない。したがって既約性が証明される。

定義から１階代数的差分方程式の解はすべて分解可能拡大に属し得る。また、基本解系による係数拡大により線形差分方程式の解もすべて分解可能拡大に属し得る。また、Kolchin による微分体の強正規拡大が微分体の分解可能拡大であることが知られているが、差分体の強正規拡大については Bialynicki-Birula や Infante のものが分解可能拡大であることが確認できる。これらのことが意味するのは、例えば線形差分方程式や１階代数的差分方程式の解によっては D7(1)型ｄパンルヴェ方程式の超越関数解が(代数的に)表現できないということである。この成果により独立変数をｑ倍する変換に関する差分方程式であるｑパンルヴェ方程式以外の離散パンルヴェ方程式に対しても既約性を議論できることが裏付けられた。

(2)分解可能拡大に現れる係数拡大について、有限超越次元という仮定を取り除いた。そのため、既約性の定義と証明の流れを再構築した。証明においては特に複数回の変換を扱う必要が生じたため、次のような補題を準備した。Ｌを差分体、ｆとｇはＬ上超越的だが代数的従属であるとする。もしｆとｇの任意回数の変換がすべてＬ上超越的であれば、適当な回数変換したものｆ’とｇ’を根とする２変数既約多項式が存在し、その多項式の変換も既約である。多項式の変換とは、各係数を変換して得られる多項式のことである。

有限超越次元という仮定は、本質的には「ほとんど可逆」な差分体であることを仮定する。理想的にはこの種の仮定は無い方が好ましい。今回の成果を考察し、他の差分拡大に対しても同種の仮定を取り除く方法を見出したい。

(3)１階有理的差分方程式をみたす関数達の代数的独立性を、方程式に現れる多項式の次数のみにより判定する方法が得られていた。これを応用し、f(x), f(x^2), …, f(x^n)の代数的独立性に関する結果を得た。細かい条件は省くが、おおよそ次のような結果である。超越関数 f(x)が倍角公式を持ち、特に f(2x)が f(x)の多項式の比で表されるとする。この時、分母と分子の多項式が互いに素になるようにすれば、それぞれの次数は確定する。分母と分子の次数の最大値が２以上であれば、f(x), f(x^2), …, f(x^n)は代数的独立である。例として、ワイエルシュトラスのペー関数に対して上記のものが形式ベキ級数体 C((x))に属す初等関数で生成される体Ｅ上代数的独立であることがわかる。これはまた、ペー関数が f(x)を f(x^2)に移す変換に関するＥ上の代数的差分方程式をみたさないことも意味する。つまり、ペー関数は倍角公式を持つため独立変数を２倍する変換に関しては差分代数的であるが、マーラー型の変換に関しては差分超越的である。

(4)１階有理的差分方程式の一種の差分リッカチ方程式と呼ばれる方程式群に対して、その標準形を＋δだけでなくｑ差分やマーラー型などの他の変換にも通用するものに一般化した。差分リッカチ方程式とは、１回変換された関数が元の関数の１次分数で表されるとする差分方程式である。ここでは特に係数に独立変数が現れるものを考えている。このような方程式は定数係数でないとか、非自励であるなどといわれる。１次分数の形であるから係数は４つ（本質的には３つ）あるが、このうち１つを除いて定数であるような特定の形に変形することができるというのが成果である。これは差分リッカチ方程式の解の超超越性への足掛かりとなる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① <u>Nishioka, S.</u>, Algebraic independence of solutions of first-order rational difference equations, Results in Mathematics, Volume 64, Issue 3 (2013), 423--433. 査読有
DOI:10.1007/s00025-013-0324-8

〔学会発表〕（計５件）

① <u>西岡斉治</u>、差分代数と超越数論、Workshop on Galois point and related topics、２０１３年９月１５日、山形大学、山形県
② <u>西岡斉治</u>、倍角公式と代数的独立性、2013 函数方程式論サマーセミナー、２０１３年８月９日、リゾートホテル阿蘇いこいの村、熊本県
③ <u>西岡斉治</u>、Approximation of Poincare's new functions by rational functions、Séminaire Equations fonctionnelles、２０１３年２月１２日、Université de

Strasbourg、フランス

④ 西岡斉治、差分リッカチ方程式の標準型、ウィンターセミナー２０１３、２０１３年1月２８日、KKR 湯沢ゆきぐに、新潟県

⑤ 西岡斉治、差分方程式から見た関数の初等性、つくば微分ガロア理論セミナー、２０１２年１２月１３日、筑波大学、茨城県

６．研究組織

(1)研究代表者

西岡　斉治（NISHIOKA, Seiji）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：１０６３２２２６