様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月　 6 日現在

機関番号：13302
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：24840022
研究課題名（和文）演算適用の体系と集合論の体系との間の翻訳の構築

研究課題名（英文）Construction of an interpretation between systems of applicative theory and set theory

研究代表者
根元　多佳子（Takako, Nemoto）

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：20546155

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円、（間接経費）　　690,000円

研究成果の概要（和文）：集合を基本的な対象とする集合論の体系と、文字列に対しての変換規則からなる演算適用の体系の間の翻訳について、P.Aczelによって与えられた集合論から型理論の体系への翻訳を応用した翻訳を構築した。結果としてはこの手法で演算適用の体系に翻訳可能な集合論の体系は通常の集合論とは異なり「集合全体から成る集合」が存在する一方で、比較的弱いと考えられている集合内包公理のいくつかが翻訳できないことがわかった。また、この方法で翻訳できる集合論で、証明能力の意味で最適と言える集合論が構成できた。

研究成果の概要（英文）：We gave an interpretation from set theory, whoes basic objects are sets, into applicative theory, whoes basic objects are operators and natural numbers, by modefing the interpretation method from set theory into type theory, proposed by P. Aczel. It turned out that set theories which can be interpreted by this new method is defferent from ordinal set theory in the following sense: 1. They allows the existtence of universal set, namely, the set of ALL set; 2. They does not allow rather weak set comprehension axioms. We have constructed an approprеate set theory which can be interpreted by this method in the sense of the proof theoretic strength.

研究分野：数理論理学

科研費の分科・細目：数学、数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：集合論　演算適用の理論　証明論　翻訳　算術

１．研究開始当初の背景

研究開始当時、P. Aczel による直観主義論理上の集合論 CZF の型理論への翻訳は広く知られていたものの、この方法の演算適用の体系への応用は知られていなかった。また、非常に強い古典論理上の集合論の体系から演算適用とクラスと呼ばれる対象を扱う体系への翻訳が realizability interpretation といくつかの翻訳を組み合わせると可能であることが研究開始直前に示された。ただし、既知の翻訳が比較的強い集合論からの翻訳であったのに対し、弱い集合論を翻訳するのに必要十分な体系という観点からの研究は存在しなかった。

２．研究の目的

（１）P. Aczel によって与えられた集合論から型理論への翻訳の手法を応用し、集合論から演算適用の体系への翻訳を与える

（２）（１）で得られた翻訳手法で、算術の体系として広く知られる EL や HA と同程度の証明能力をもつ体系である演算適用の体系 APP と同程度の証明能力をもつ構成的集合論 CZF の部分体系を明らかにする。

逆に、CZF に自然な公理を付け加えることで CZF と同程度の証明能力をもつ演算適用の体系を構成する。

（３）（２）で得られた集合論の体系上で実際に順序数など算術の体系では扱いにくかった対象についてその挙動を逆数学的に調べる。

３．研究の方法

（１）はじめに、集合論の非常に強い体系 KPm から演算適用の非常に強い体系であるT_0+M と呼ばれる体系への realizablity interpretation が研究開始直前に提案されたことから、この手法について調査を行った。さらに、この方法が他の体系間の翻訳に応用可能であるかについて、検討を行った。

（２）この翻訳に関連する二階算術の体系においての順序数と、集合論において重要な性質である決定性との関係についても集合存在公理のひとつである算術的超限再帰公理との関係について、研究を行った。特に、算術的超限再帰法の中でも、算術的超限再帰法全体を得るには最小の操作のクラスであるΠ^0_1というクラスに含まれる操作を順序数に沿って操作することで定義できる集合の存在することと、同じく順序数αに沿って定義され、連続関数の逆像について閉じたクラスとして重要な$(\Sigma^0_1)_\alpha$と呼ばれるクラスに含まれるゲームで少なくとも一方のプレーヤーが必勝戦略をもつという決定性という性質の同値性について、決定性の構成において必要とされる集合の存在を精密にカウントすることで、「集合を作る操作の繰り返し回数β」と$(\Sigma^0_1)_\alpha$のαとの対応関係について調べた。

（３）P. Aczel が提案した集合論から型理論への翻訳の手法を応用し、集合論から演算適用の体系への翻訳手法として集合論の原子論理式 x∈y を∃z(yz=x)と翻訳する手法（手法１）でどのような集合論が演算適用の体系に自然に翻訳されるかを調べた。更にこれと一般的に realizability interpretarion と呼ばれる手法とを組み合わせる（手法２）ことで、より多くの公理が翻訳可能な手法を開発した。

（４）手法１・２でどのような集合論が演算適用の体系 APP やその拡張体系に翻訳可能であるかを明らかにした。また、これらの手法の同士の関係を調べた。算術から集合論へのよく知られた翻訳と組み合わせることで、今回新しく開発した翻訳手法を用いて翻訳される集合論が証明能力の意味で最適なものであることを示した。

４．研究成果

（１）この研究の開始直前にベルン大学の佐藤憲太郎博士により提案された古典論理上の集合論の非常に強い体系 KPm から演算適用の

非常に強い体系である T_0+M と呼ばれる体系への realizablity interpretation について、博士と共により強い体系同士の翻訳への応用の可否について検討したが、この方法の直接的な応用では難しいということが明らかになった。また、この翻訳では翻訳される演算適用の体系に非常に強いクラスの存在を要請するために、弱い集合論から弱い演算適用の体系には応用不可能であることもわかった。

（２）本研究で扱う算術の体系に関連して、算術上の体系における順序数構造の振る舞いに関して、先に調査を行った。特に、二階算術において、HA と同じ証明能力をもつことが知られている ACA_0 と呼ばれる体系周辺の順序数構造と決定性の関係について調べた。この結果、算術的超限再帰法、特に算術的操作の中でもΠ^0_1と呼ばれる種類の操作をαまで繰り返し適用することで得られる集合の存在と、$(\Sigma^0_1)_\alpha$ という連続関数の逆像について閉じたクラスとして重要なゲームのクラスの決定性の同値が、算術的超限帰納法の証明論的順序数と呼ばれるΓ_0よりも小さいαのみで成り立ち、それ以外では成り立たないことが明らかになった。これにより順序数に沿って定義された命題群が順序数の大きさの大小によって証明論的強さの意味である点から挙動を大きく変えるという現象が見つかった。また、これまであまり調べられてこなかった、こうしたゲームの必勝戦略の再帰理論的複雑さもこの手法で調べられることがわかり、この厳密な測定に適したパラメタのない二階算術の形式体系の整備も行った。

（３）（１）で検討した集合論よりもはるかに弱い集合論から演算適用の体系への翻訳について、当初の計画通り P. Aczel の翻訳手法を応用した手法１を用いた翻訳を定め、この手法で翻訳される集合論の集合論的性質を明らかにした。この結果、通常の集合論では存在が否定される「集合全体から成る集合（宇宙）」が存在することが分かった。したがって、この方法ではどのような拡張をしても、構成的集合論として一般的に知られる CZF は翻訳できないことが分かった。逆に positive set theory と呼ばれる、宇宙の存在を許す集合論の部分体系のある部分体系 S ならば翻訳可能であることが分かった。この集合論 S は空集合の公理、対の公理、無限公理、宇宙の存在公理、任意の集合 a に対して a 上の有限列からなる集合の存在公理、自然数上の帰納法、そして原子論理式、∧、∨、∃x、n∈ω∧∀x∈n に関して閉じたクラスΔについての内包公理を持つ。
S に対しては既知の方法で算術 HA が翻訳可能であることも確かめられ、APP と HA が同程度の証明能力をもつという既知の結果と合わせることで S がこの翻訳で翻訳可能な集合論として証明能力の意味で最適であることがわかった。

（４）手法１と realizability interpretation と呼ばれる手法を組み合わせた新たな翻訳手法（手法２）を開発し、上記 S の拡張体系 S' が APP に翻訳可能であることを示した。ここで S' は CZF の特徴的な公理である strong collection や subset collection といった公理も含むので、こうした公理が宇宙の存在と共存可能であることが分かった。特に、この翻訳では、翻訳される側の演算適用の体系には公理を追加しないままで翻訳が可能であることから、strong collection や subset collection は集合論 S の上では証明論的強さを上げることなく共存可能であることも示された。

（５）手法１と手法２の比較を行い、既存の realizability interpretation との証明能力の比較を行った。手法１の翻訳で集合論の論理式 A を演算適用の体系の論理式 A^* へ変換し、さらに APP で既知の realizability interpretation を適用した場合と、上記の手法２の方法では、集合論の論理式に対しては APP における証明能力が変わらないことを示

した。この結果、今回開発した手法に APP から算術 HA への翻訳を組み合わせることで、集合論の論理式 A に対して、S’ 自身では証明可能でなくても、HA においては A^*を算術へ翻訳したものが証明可能となるものが存在することがわかった。これは、集合論 S’+A が HA に翻訳可能であるいうことであり、S’ +A での証明が HA の証明へと変換可能であることも示せる。特に、S’+A が矛盾する場合は HA も矛盾することになり、すでに無矛盾性が知られている HA に翻訳可能なことで集合論 S’+A も無矛盾であることがわかる。また、体系 S’ と HA が証明能力として同じであることから、S’+A と証明論的強さを保ったまま証明可能であることが明らかになった。この具体例としては、構成的数学の一派であるロシア流再帰的数学で採用された（但し通常の数学では否定される）Church’s Thesis やさらにその拡張版である Extended Church’s thesis および Marcov’s principle などが上げられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　４件）

① Takako Nemoto Interpretation of set theory into theory of operators, Correctness by Construction, CORCON 2014 workishop, ジェノヴァ(イタリア) ２０１４年３月２６日
② Takako Nemoto Ramified Analysis Revisited: A Refinement of Determinacy Hierarchy, Proof 2013, ベルン（スイス連邦）２０１３年９月９日
③ Takako Nemoto Making a detour via intuitionistic theories — Embedding set theories into systems of explicit mathematics, Constructive Mathematics: Foundation and Practice, ニーシュ(セルビア) ２０１３年６月２６日（招待講演）
④ Takako Nemoto Determinacy in classical and constructive reverse mathematics, Workshop on Reverse Mathematics and Type Theory, 2013, ソウル（大韓民国）２０１３年３月２６日

〔図書〕（計　　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕
ホームページ等
http:www.jaist.ac.jp/t-nemoto/

６．研究組織
(1)研究代表者
根元　多佳子（NEMOTO, Takako）
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科・助教
研究者番号：20546155

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：