

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：13701

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840024

研究課題名(和文)実解析学に現れる種々の関数不等式と付随する変分問題への応用

研究課題名(英文)Various functional inequalities and their applications to the variational problems

研究代表者

和田出 秀光(Wadade, Hidemitsu)

岐阜大学・教育学部・助教

研究者番号：00466525

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：我々の主要な研究目的は、Sobolev型不等式およびそれらに付随する変分問題を考察することである。具体的な研究成果の1つとして、Adachi-Tanakaによって得られた全空間における斉次Trudinger-Moser型不等式に対し、その最大化関数の存在を示した。一方、全空間におけるTrudinger-Moser型不等式として非斉次の不等式が知られている。Ishiwata (2010)では、同不等式の最大化関数の存在、非存在を考察し、それは次元に大きく影響されることが示された。我々はより一般的なSobolev型汎関数を考え、不等式が持つ斉次性と最大化関数の存在の関係を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Our main purpose of the research lies in studying Sobolev type inequalities and the corresponding variational problems. Especially, we concern the critical embeddings which appear in Trudinger-Moser type inequalities, Gagliardo-Nirenberg type interpolation inequalities and so on. In a period of this fund, we investigated the existence of maximizer associated with the Trudinger-Moser type inequalities of the scaling invariant form obtained by Adachi-Tanaka in 1999, and actually proved the existence of a maximizer. On the other hand, it was known that the similar type Trudinger-Moser inequalities on the whole space which do not satisfy the scaling invariance. Ishiwata (2010) proved that the existence of maximizers for this inequality heavily depends on the dimension. Based on this fact, we considered the variational structure and clarified the relation between the scaling invariance and the existence of a maximizer.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：関数不等式 楕円型偏微分方程式 変分問題

1. 研究開始当初の背景

Sobolev 空間と Lebesgue 空間の包含関係を示す Sobolev 定理は、非線形偏微分方程式の解析等、数学解析の種々の分野において必須である。特に、補間不等式として知られる Gagliardo-Nirenberg の不等式は、Sobolev 定理の改良であり、その応用例は数知れない。このような背景を踏まえ、これらの関数不等式の導出のみならず関連する変分問題を考察する。具体的に、Sobolev-Hardy 型不等式、Trudinger-Moser 型不等式及び Brezis-Gallouet-Wainger 型不等式等の関数不等式に対して、その最良定数に付随する変分問題を主要な研究テーマとした。特に、最良定数を達成する最小化関数(または最大化関数)の存在は、Euler-Lagrange 方程式の正值解の存在を意味し、変分問題として記述される最小化問題の研究は、非線形楕円型方程式の解析に有益である。例えば、我々はこれまで Sobolev-Hardy 型不等式または Brezis-Gallouet-Wainger 型不等式に対して、不等式に対する最良定数を達成する最小化関数の存在、非存在を研究してきた。一方、Sobolev 不等式の臨界ケースまたは Brezis-Gallouet-Wainger 型不等式の双対に位置する不等式として指数型不等式である Trudinger-Moser の不等式は、臨界 Sobolev 空間に属する関数の指数型可積分性を保証する不等式であり、Trudinger、Moser らによって最良定数と共に導出された。また、同不等式的最良定数を達成する最大化関数の存在が Carleson-Chang、Flucher、Lin らによって証明されている。他方、同不等式は、領域及び関数空間の一般化等、様々な意味において拡張された不等式が知られている。我々は、これらの拡張された不等式に対しても不等式に付随する最大化問題を考察し、楕円型方程式の解析を進めた。

2. 研究の目的

我々の研究目的の1つは、これまでに得られている Sobolev 空間上の Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式の改良及び一般化にある。また、これらの関数不等式に付随する変分問題を考え、対応する Euler-Lagrange 方程式の可解性を考察する。

3. 研究の方法

研究計画を主に2種に分類し、研究を進めた。我々は、臨界 Sobolev 空間に代表される種々の臨界空間において、これら関数空間がもつ特有な不等式の構築を試み、これらの不等式を用いて関数空間のもつ性質を考察した。具体的に、臨界空間がもつ固有の不等式である対数型 Hardy 不等式を精査した。臨界 Sobolev 空間においては、同不等式はすでに知られていたが、関数空間を一般化し、対数型 Hardy 不等式の成立または不成立を考察した。また同時に、これらの不等式に付随する最小化問題の可解性を調査する目的において、対応する Euler-Lagrange 方程式を介した非線形楕円型方程式を考察し、同方程式の解の構造解析を主要な研究方法とした。

4. 研究成果

種々の臨界型関数空間における関数不等式の導出、及びこれらの不等式に付随する変分問題を介して、楕円型偏微分方程式の可解性に関する研究を主要な研究目的に据えた。同研究目的を踏まえ、まず臨界 Sobolev 空間を特徴づける不等式として知られる対数型 Hardy の不等式に関して考察を行い、対数型でありながらスケール不変性を保つ不等式の導出に成功した。同結果は、埼玉大学の町原秀二氏、早稲田大学の小澤徹氏との共同研究であり、Tohoku Math J. に採録された。また、Sobolev 空間を一般化した Sobolev-Lorentz 空間を導入し、臨界 Sobolev-Lorentz 空間に対する対数型 Hardy の不等式の導出を試み、その結果として、不等式に現れる指数に関し、対応する不等式が成立するための必要十分条件を与えた。同結果も、町原氏、小澤氏との共同研究であり、J. Ineq. Appl. に採録済みである。もう1つの研究目的として関数不等式に付随する変分問題の考察があるが、臨界 Sobolev 空間の指数的可積分性を保証する Trudinger-Moser 型不等式に対し、対応する最大化問題を調査し、同不等式的最良定数を達成する最大化関数の存在を証明した。同結果は、山形大学の中村誠氏、大阪大学の石渡通徳氏との共同研究であり、Ann. Inst. H. Poincaré Anal. に採録済みである。

5. 主な発表論文等

研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計7件, 全て査読有)

[1] Michinori Ishiwata, Makoto Nakamura, Hidemitsu Wadade, On the sharp constant for the weighted Trudinger-Moser type inequality of the scaling invariant form, *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse non linéaire* 31 (2014), 297-314.

[2] Shuji Machihara, Tohru Ozawa, Hidemitsu Wadade, Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces, *Journal of Inequalities and Applications* (2013), 2013:381.

[3] Hidemitsu Wadade, Quantitative estimates of embedding constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities on critical Sobolev-Besov-Lorentz spaces, *Journal of Fourier Analysis and Applications* 19 (2013), 1029-1059.

[4] Shuji Machihara, Tohru Ozawa, Hidemitsu Wadade, Hardy type inequalities on balls, *Tohoku Mathematical Journal* 65 (2013), 321-330.

[5] Yoshihiro Sawano, Hidemitsu Wadade, On the Gagliardo-Nirenberg type inequality in the critical Sobolev-Morrey space, *Journal of Fourier Analysis and Applications* 19 (2013), 20-47.

[6] Chang-Shou Lin, Hidemitsu Wadade, Minimizing problems for the Hardy-Sobolev type inequality with the singularity on the boundary, *Tohoku Mathematical Journal* 64 (2012), 79-103.

[7] Tomoyuki Suzuki, Hidemitsu Wadade,

Optimal embeddings on critical Sobolev-Lorentz spaces into generalized Morrey spaces, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 22 (2012), 225-238.

〔学会発表〕(計2件)

[1] 和田出 秀光, Logarithmic Hardy inequalities on Sobolev-Lorentz-Zygmund spaces in the limiting case, 日本数学会実函数論分科会, 愛媛大学, 2013年9月24日.

[2] 和田出 秀光, 種々の関数空間における臨界型Sobolev不等式について, 日本数学会実函数論分科会(特別講演), 東京理科大学, 2012年3月29日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和田出 秀光 (Wadade, Hidemitsu)
(岐阜大学・教育学部・助教)

研究者番号：00466525

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし