様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：２４８４００２５
研究課題名（和文）Ｋ３曲面のモジュライ空間

研究課題名（英文）Moduli spaces of K3 surfaces

研究代表者
馬　昭平（Ma, Shouhei）

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：８０６３３２５５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　900,000円、（間接経費）　270,000円

研究成果の概要（和文）：Ｋ３曲面や代数曲線のモジュライ空間および、関連したIV型モジュラー多様体の双有理型を研究した。有理性と一般型性の双方で結果を得ることができた。前者については、以下の代数多様体のモジュライ空間が有理的であることを証明した：対合付きK３曲面（２つの例外を除く）、トリゴナル曲線、テトラゴナル曲線（約半分の種数）。後者については、漸次改良の末に次を証明した：安定直交群から定まる１５次元以上のIV型モジュラー多様体であって一般型にならないものは有限個しかない。つまりほとんど全て一般型になる。

研究成果の概要（英文）：I have studied the birational types of some moduli spaces of K3 surfaces and curves, and related modular varieties of type IV. I have obtained both rationality results and general-typeness results. In the former direction, I proved the rationality of the moduli spaces of the following varieties: K3 with involution (except 2 classes), trigonal curves, and tetragonal curves (for about half genera). In the latter direction, I proved that there are only finitely many lattices of signature (2,n) with n>14 such that the modular variety associated to its stable orthogonal group is not of general type.

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：代数幾何学

キーワード：モジュライ空間

１．研究開始当初の背景
K3 曲面に関連のあるモジュライ空間の双有理型の研究が中心テーマであった。これを有理性の研究と一般型性の研究の２方向から調べていった.
（１）単有理的な代数多様体が有理的であるかという問題はリューロー問題と呼ばれ，代数幾何の伝統的な問題である．特にこの問題を代数群による線形表現の商空間に対して問うたものはネーター問題と呼ばれ，肯定的・否定的の両側面から研究が活発である．いくつかの代数多様体のモジュライ空間はこのような商空間として得られるので，その時はモジュライ空間が有理的かという幾何学的な背景を持つ問題となる．この方面では，カツィロとボゴモロフが超楕円曲線のモジュライ空間の有理性を証明したことが嚆矢となった．シェファードバロンは一つゴナリティーの高いトリゴナル曲線に対しても種数が４で割って余りが２となる場合に有理性が成り立つことを証明したが，残りの種数では未解決だった。テトラゴナル曲線に対しても種数７でのみ有理性が知られていた.

（２）偏極 K3 曲面のモジュライ空間は IV 型のモジュラー多様体として得られるので，その研究に保型形式を用いることができる．金銅やグリツェンコ‐フレック‐サンカランはこの方面からのアプローチによって，充分次数の高い偏極 K3 曲面のモジュライ空間は一般型であることを証明した．同様の方法で，グリツェンコらはいくつかの超ケーラー多様体のモジュライに対しても似た結果を証明した．しかし今あげたモジュラー多様体はどれも２１次元以下であり，高次元のモジュラー多様体の双有理型についてはグリツェンコらが一系列を調べただけで未知の部分が大きかった.

２．研究の目的
モジュライ空間の研究において双有理型を調べることは基本的な問題である．例えばハリスとマンフォードとアイゼンブッドは種数２３以上の曲線のモジュライが一般型であることを証明したことで，それらの曲線の一般的なメンバーを具体的に構成することが不可能であることを証明した．同様に，もしとある IV 型モジュラー多様体が一般型であることが証明できれば，それを周期空間とする超ケーラー多様体の一般メンバーが具体的に構成できない事が分かる．超ケーラー多様体は知られている例が非常に少ないという事情を，この観点から解明したい.
また逆に，モジュライ空間が有理的であることがわかれば，これはある意味対象にしている代数多様体がとても希少なクラスであることを指示していると思うことができる.

３．研究の方法
あるモジュライ空間が有理的であることを証明するには通常，その空間をまずパラメーター空間による代数群による商として記述してから，代数群の作用を解析するというアプローチが基本的である．前半は対象としている代数多様体の特性をよく理解する必要があり，後半は独特の難しさがある.
モジュライ空間が逆に一般型であることを証明するには通常，その標準束を多重ホッジ束と別の有効的な因子の和として書くというアプローチをとる．Ⅳ型モジュラー多様体の場合は標準束が多重ホッジ束から境界因子と分岐因子を引いたものとして書けるので，ホッジ束の部分を使って障害部分である境界因子と分岐因子に対処していくことになる．このときは保型形式を用いる.

４．研究成果
（１）論文①では，７５個ある対合付き K３曲面のモジュライのうち７３個が有理的であることを示した。この研究は以前から継続して行ってきたものであり、平成２４年度に最後の数個を調べて仕上げた、というのが研究経過である。以前は次数１の周期写像の構成と代数群による商空間の有理性の証明という２段階からなっていたが。この最後の数個に対しては格子に操作を加えてモジュラー多様体を同型な別のものに取り換えるというテクニックを使った．このテクニックはドルガチェフ氏と金銅氏の論文から学んだ。
（２）論文④では大橋久範氏と滝真語氏との共同研究によって，論文①の研究の類似を位数３の自己同型付き K３曲面に対して調べた。この場合モジュライは２４個あり、そのうち２２個が有理的であることを示した。証明の戦略は論文①と同じく，次数１の周期写像の構成と代数群による商空間の有理性の証明の２本柱からなる．次数１の周期写像を構成する過程で、位数３の自己同型付き K３曲面を構成する手段として「混成分岐」の概念を考案した。また、モジュライ空間（超球商）の構成を証明をつけておこなった。（それまでは、他の数学者によって主張はされていたが証明はうやむやにされていた状態だった。）
（３）論文②では直積群の線形表現の商空間がいつ有理的になるかという問題に対して、各直積因子に問題を分解する一般的なアプローチ方法を考案した。アイディアはグラスマン多様体上のファイブレーションを使って群作用を二つの独立な因子に分解するというものである．こうして見つけたアプローチを SL(2)SL(2) に適用し、既約表現の双次数の少なくとも片方が偶数となる場合に有理性を証明できた。
（４）論文③ではトリゴナル曲線のモジュライの有理性を種数が４で割り切れる場合に証明した。それまでは種数が４で割って２余る場合（シェファードバロン）と奇数種数（拙者）の場合に有理性がわかっていた。これで全ての種数で有理性がわかった。こうして超楕円曲線のモジュライの有理性（カツィロ、

ボゴモロフ）を拡張することができた。種数が４で割り切れるトリゴナル曲線のモジュライ空間は SL(2)SL(2)の既約表現の商空間ではあるが，双次数がともに奇数であるため，論文②の方法を使うことはできない．そこで，別の戦略として２重バンドルの方法と呼ばれるものを使った．これは今の場合には，SL(2)SL(2)に対するクレブシュ‐ゴルダン分解を用いて与えられた表現をグラスマン上のファイブレーションとして実現するというものである．このアプローチは３０年前から知られていたが，実際に成功を収めたのはこれまで２，３例しかなかった．

（５）論文⑤では，論文③の結果をテトラゴナル曲線に拡張することを目指し、約半分の種数（１２で割って余りが1、２、５、６、９、１０になる場合）においてモジュライの有理性を証明できた。テトラゴナル曲線は射影直線上の射影平面束内の（２，２）完全交差として記述できるので，これによってモジュライ空間を代数群の商として記述できる．代数群作用のタイプが種数の６による余りによって異なるので場合分けが必要となる．代数群作用の解析では論文②のテクニックを効果的に使うことができた。

これ以後 IV 型モジュラー多様体の研究に進み、有理性の研究は休止となった。

（６）符号(2,n) のどんな偶格子に対しても、E8 格子を充分たくさん直和すればその安定直交群から定まるモジュラー多様体が一般型になることを示した。特に奇ユニモジュラー格子から定まるモジュラー多様体は３８次元以上で一般型になることがわかった。この研究は次の研究（７）への契機となった。

（７）１５次元以上の符号(2,n) の安定直交群から作られるモジュラー多様体は高々有限個を除いて一般型になることを証明した。一度全直交群に対して同じ主張を証明できたと思ったのだが、幸か不幸か誤りに気づいた。今後の課題としたい。証明の手法はこの方面ではスタンダードなものである：トロイダルコンパクト化を用いてモジュラー多様体の標準束と保型形式を結びつけ、保型形式を十分たくさん構成することで標準束が巨大であることを証明する。より詳しくは，（ア）重さがモジュラー多様体の次元未満であるようなカスプ形式を構成し，（イ）余った重さの保型形式の線束から分岐因子を引いたものが巨大であることを示す．これによってトロイダルコンパクト化の標準束の何倍かが有効な因子と巨大な因子の和になる事が分かる．標準特異点しか持たないようなトロイダルコンパクト化をとれることが知られているので，これによって非特異射影モデルが一般型であることがしたがう．ステップ（ア）ではグリツェンコによるヤコビリフティングの方法を使う．ステップ（イ）ではグリツェンコ‐フレック‐サンカランによる直交群の体積公式の計算をする．こうした議論の際にポイントポイントで一般的な評価を与えておくことで、議論が有限個を除いて機能することがわかる。証明の系として、グリツェンコとニクリンの鏡映的保型形式に関する予想にも応用を与えることができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　５　件）

① Shouhei Ma, “Rationality of the moduli spaces of 2-elementary K3 surfaces", to appear in Journal of Algebraic Geometry.

② Shouhei Ma, "Rationality of fields of invariants for some representations of SL(2)SL(2)", Compositio Mathematica 149 (2013) no.7, 1225-1234.

③ Shouhei Ma, "The rationality of the moduli spaces of trigonal curves", to appear in International Mathematical Research Notices.

④ Shouhei Ma, Hisanori Ohashi and Shingo Taki "Rationality of the moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces", to appear in Transaction of the American Mathematical Society.

⑤ Shouhei Ma, "Rationality of some tetragonal loci", to appear in Algebraic Geometry.

〔学会発表〕（計　８　件）

① "Rationality of fields of invariants for some representations of SL(2)×SL(2)", in "高次元双有理幾何の周辺", RIMS, 2012 年 6/13

② "対合付き K3 曲面のモジュライの有理性", in "ホッジ理論と代数幾何学", 東京電機大学, 2012 年 8/1

③ "The rationality of the moduli spaces of trigonal curves", in "低次元多様体モジュライ空間の幾何学", RIMS, 2012 年 10/29

④ "Rationality of the moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces", in "Algebraic geometry, modular forms and applications to physics", ICMS, Edinburgh, 2012 年 11/30

⑤ "The rationality of the moduli spaces of trigonal curves", in "Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics", 首都大学東京, 2013 年 3/7

⑥ "The rationality of the moduli spaces of trigonal curves", in "Workshop on deformation and moduli", KIAS, Seoul, 2013 年 3/28

⑦ "Finiteness of orthogonal modular varieties of non-general type", in "モジュライ空間と自己射", RIMS, 2014 年 3/7

⑧ "Finiteness of orthogonal modular

varieties of non-general type", in "Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and Enriques surfaces", Laboratoire Painleve, Lille, 2014年3/27

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
馬　昭平　（MA, Shouhei）
名古屋大学・多元数理科学研究科・助教
研究者番号：80633255