

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840027

研究課題名(和文)非線形拡散方程式の爆発問題と拡散係数

研究課題名(英文)Blow-up problem for a nonlinear diffusion equation and its diffusion coefficient

研究代表者

藤嶋 陽平 (FUJISHIMA, Yohei)

大阪大学・基礎工学研究科・助教

研究者番号：70632628

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では非線形熱方程式の解の爆発問題と拡散係数の関係を調べた。特に、拡散係数が十分に小さい状況を考え、解の爆発集合の特徴付けを行った。
初年度の研究では、拡散係数が十分に小さい場合の研究を応用し、円環領域における非線形熱方程式の球対称境界爆発解の非存在を示した。
最終年度の研究では、指数型非線形項を含む一般の非線形熱方程式の爆発問題に関する研究を行った。特に拡散係数が十分に小さい状況下での爆発集合の特徴付けを行った。

研究成果の概要(英文)：This research program is devoted to the study of the relationship between the blow-up problem for a nonlinear heat equation and the diffusion coefficient. In particular, I have studied the characterization of the location of the blow-up set under a small diffusion situation. In the first year of this program, I applied the results of the blow-up problem with small diffusion, and proved the non-existence of the radially symmetric solution which blows up on the boundary for a nonlinear heat equation on an annulus. In the final year of this program, I have studied the blow-up problem for a superlinear heat equation with general nonlinearity including exponential nonlinearity. In particular, I characterized the location of the blow-up set of solutions with small diffusion.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：非線形偏微分方程式 爆発問題 爆発集合 拡散係数 解の形状

1. 研究開始当初の背景

固体燃料の燃焼モデルなどの化学反応による発熱の温度分布を調べる際にしばしば現れる非線形熱方程式の解は、拡散項と非線形項のバランスによって様々な挙動を示す。特に、初期状態を記述する関数が滑らかかつ有界であるにも関わらず、非線形項の影響によって、有限時間で解が空間的な特異性を持つ場合があり、このような現象は解の有限時間爆発と呼ばれている。

非線形熱方程式の解の爆発現象は非線形問題特有の現象であり、これまでに多くの研究がなされている。解が有限時間で爆発するとき、解が

- ・ いつ爆発するか？
- ・ どこで爆発するか？
- ・ どのようなメカニズムにより爆発するか？

という問題は自然な問いであり、非常に重要な問題である。これらの問題を考えることにより、解の有限時間爆発のメカニズムを明らかにすることが可能となり、拡散項と非線形項の相互作用が解に与える影響について調べることが可能となる。

2. 研究の目的

研究の背景で述べた「解がいつ爆発するか?」、「解がどこで爆発するか?」、「どのようなメカニズムで爆発するか?」という問題を通して、解の爆発のメカニズムを明らかにするのが研究の目的である。とりわけ本研究課題では解が爆発する場所、すなわち解の爆発集合の位置に焦点を当て、研究を行った。

解の爆発集合の位置を調べるということは、簡潔に言うと解が爆発するまでの最大点および最大値の挙動を追うことに対応している。故に解の爆発集合を調べることは解の形を解析することにも密接に関連しており、偏微分方程式の解の諸性質を知る上で最も重要な問題の一つでもある。

3. 研究の方法

解の爆発集合の位置の特徴付けは基本的かつ重要な問であるが、爆発集合は、拡散項と非線形項の相互作用や領域の幾何的な情報など様々な要因が複雑に絡み合い決定されるため、その位置を初期値などの与えられた情報から特徴付けすることは困難を極める。そこで本研究課題では、拡散係数が十分に小さい場合を考察することで、爆発集合の位置を特徴付けする。

4. 研究成果

これまでの研究で、拡散係数が十分に小さな状況下での爆発問題に関する結果は

様々な応用が考えられる。本研究では、拡散係数が十分に小さい場合の爆発問題の結果の改良およびそれらの応用を行った。初年度の研究では応用を中心に考察した。

2012 年度の研究

2012 年度は冪乗型非線形項を持つ熱方程式の解析を行った。一般に解が有限時間で爆発するとき、爆発直前のある時刻を基準に解に適当なスケール変換を施すと、元の爆発問題は形式的に拡散係数が十分に小さい状況に帰着される。初年度の研究では、このような着想の下、拡散係数が十分に小さい場合の研究が、一般の状況下における爆発問題へ応用可能かを検証した。

その結果として、円環領域上における冪乗型非線形熱方程式の球対称解の爆発問題への応用が可能となった。特に、円環の境界で解が爆発し得ないことを示した。既存の理論を用いることにより、円環の外側の境界で解が爆発しないことは容易に示されるが、内側での境界爆発の排除は球対称解に限っても未解決であった。本研究では、解の爆発直前を基準として解に適当なスケール変換を施し、拡散係数が十分に小さい状況を考え、更に解の増大度および微分に関する適切な評価を導くことにより、境界爆発解の非存在を示すことができた。

上記の適切な評価を導く際には、冪乗型非線形熱方程式の Liouville 型定理、すなわち、ある状況下における非自明な全域解の非存在に関する定理を用いた。さらにはこれらの議論を応用することにより、解が適切な増大評価を満たす場合には境界爆発解が存在しないことも示した。

更なる応用として、全空間における空間無限遠での解の爆発の可能性についても考察し、通常想定されうる爆発の増大度を持つ解は空間無限遠方では爆発しないことを示した。この結果においては、エネルギー法を用いていないため、初期値の微分に関する可積分性の仮定を要せず、非線形項の強さに対する仮定も必要ないことが分かった。

次年度の研究では拡散係数が十分小さい場合の研究の改良を中心に考察した。特にスケール不変性を持たないような状況下での解析を行った。

2013 年度の研究

2013 年度の研究は、拡散係数が十分に小さい場合の研究に特化して行った。既存の研究では、扱うことができる非線形性が冪乗型の非線形項に限られており、研究の幅を広げるためにはより一般の非線形方程式にも適用できるかを考察する必要があると考える。この拡張により、種々の非線形熱

方程式の爆発問題への応用が想定され、非線形熱方程式の一般論への第一歩になると思われる。

2013年度の研究成果によって、指数型非線形項を含む種々の非線形熱方程式に対して、拡散係数が十分に小さい状況下での爆発集合の特徴付けを行うことができた。一般の非線形熱方程式を扱う上で困難となる点は、解に対する適切なスケール不変性の欠如である。冪乗型や指数型などの特殊な非線形項を除くと、方程式に対するスケール不変性が失われ、爆発集合の解析が格段に困難となる。そこで本研究では、既存のスケール変換を参考にし、これらの変換の一般化を導入した。方程式に対するスケール不変性は期待できないため、方程式の形は変わるが、拡散係数が十分に小さい状況下で変換後の方程式の解を解析することで、研究成果を得ることができた。本研究の特筆すべき点は指数型非線形項を扱うことができる点であり、冪乗型非線形項とは本質的に増大度が異なる方程式に対する解析も行うことができるようになった。手法は主に比較原理であり、適切な比較関数、すなわち、優解および劣解を構成し、適切な解の評価を得ることである。

また、2013年度の研究で得られた変換は、自己相似変換の一般化になっており、爆発集合の解析のみではなく、他の爆発問題や解の挙動を調べる上でも応用が可能であると想定される。今後はそのような発展の可能性も考察する。

本研究課題で得られた結果により、拡散係数が十分に小さい場合の研究が、様々な問題に応用可能であることが示唆される。上記の境界爆発解の非存在や空間無限遠における爆発の可能性についての考察はその一例であり、今後の研究の発展により更なる応用も目指すことができる。また、指数型非線形項を含む種々の非線形熱方程式に対する理論の構築が可能となったため、研究の幅は大きく広がったと言える。今後はこれらの成果を一般の非線形熱方程式に応用することを考え、研究を進展させる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

1. Yohei Fujishima and Kazuhiro Ishige, Blow-up set for type I blowing up solutions for a semilinear heat equation, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis **31** (2014), 231-247.

[学会発表](計 4 件)

1. 藤嶋陽平, Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data, 第5回東北楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2013年1月26日, 東北大学.
2. 藤嶋陽平, Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data, 大阪市大・大阪府大合同 南大阪応用数学セミナー, 2013年5月18日, 大阪府立大学.
3. 藤嶋陽平, Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data, 3rd Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2013年9月5日, 東京工業大学.
4. 藤嶋陽平, Stability for parabolic quasiminimizers, Joint research program on nonlinear PDE's, University of Firenze and Tohoku University, 2014年3月7日, University of Florence.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究代表者

藤嶋 陽平 (FUJISHIMA, Yohei)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教
研究者番号：70632628

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：