

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 7日現在

機関番号：15201

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2012

課題番号：24840029

研究課題名（和文）流体力学に現れる偏微分方程式の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis of partial differential equations arising from fluid mechanics

研究代表者

柿澤 亮平 (KAKIZAWA Ryohei)

島根大学・教育学部・講師

研究者番号：70633163

研究成果の概要（和文）：流体力学に現れる偏微分方程式に関し、代表者は圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解について研究した。圧縮粘性流体の Burgers 渦については数学的な先行研究が無く、順圧性の有無に注意を払いながら明示解を求めた。成果は、圧縮粘性流体の Burgers 渦を研究する上で、非順圧の場合を考えるのが自然であると判明したことである。この成果を踏まえ、代表者は非順圧の圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の数学解析について研究しようと試みている。

研究成果の概要（英文）：As for partial differential equations arising from fluid mechanics, I studied explicit solutions satisfying the Burgers vortex in a compressible viscous fluid. Since there was no mathematical result concerning the Burgers vortex in a compressible viscous fluid, I found the explicit solutions while paying attention to the existence or nonexistence of barotropicity. The achievement is to clarify that the nonbarotropic case is natural under the study of the Burgers vortex in a compressible viscous fluid. Based on this achievement, I am trying to study mathematical analysis of the Navier-Stokes equations for compressible viscous nonbarotropic fluids.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
総計	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：偏微分方程式論、流体力学

1. 研究開始当初の背景

流体力学に現れる偏微分方程式に関し、代表者は圧縮粘性流体の Burgers 渦について研究していきたいと考えていた。Burgers 渦とは Burgers によって定義された渦度場のことで、渦度場の伸張効果と粘性による拡散効果の釣り合いを端的に表している。非圧縮粘性

流体においては、Burgers 渦が明示的に表されており、Navier-Stokes 方程式の定常解になることが分かる。これまで Galloway-Wayne は小さな Reynolds 数に対して Burgers 渦の 3 次元的な L_2 漸近安定性を考察した。さらに最近、Galloway-前川が Burgers 渦の 3 次元的な漸近安定性に対応する線型化作用素

のスペクトル解析を行い、任意の Reynolds 数に対しても Gallay-Wayne と同様の結果を得る事に成功した。

一方、乱流といった典型的な気象現象の数理構造を考える上では、圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式における Burgers 渦を考察することが重要である。ところが、代表者が調査した限りでは、圧縮粘性流体の Burgers 渦に関しては物理的な実験研究のみで、数学的な先行研究はないことが判明した。

参考文献

- ① J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech. 1 (1948), 171--199.
- ② T. Gallay and Y. Maekawa, Three-dimensional stability of Burgers vortices, Commun. Math. Phys. 302 (2011), 477--511.
- ③ T. Gallay and C. E. Wayne, Three-dimensional stability of Burgers vortices: the low Reynolds number case, Phys. D 213 (2006), 164--180.
- ④ T. Gallay and C. E. Wayne, Existence and stability of asymmetric Burgers vortices, J. Math. Fluid Mech. 9 (2007), 243--261.

2. 研究の目的

上記の状況から進展するために、非圧縮粘性流体の Burgers 渦を踏まえ、次の二つの問題点を明らかにすることが研究目的である。

(1) 圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解

非圧縮粘性流体の Burgers 渦の速度場は明らかに順圧の圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の定常解ではない。この問題点を踏まえ、速度場を実 3 次正方行列と原点・質点間の距離 (3 次ベクトル) の積、密度を定数でない関数によって表すことで、圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解の形を求めることが一つ目の研究目的である。特に、密度の明示解の形を求める事が最も重要になるため、流体が順圧である場合とそうでない場合の双方を考える。

(2) 圧縮粘性流体の Burgers 渦の L_p 漸近安定性

圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解を求められれば、Gallay-前川と同様に、Burgers 渦の 3 次元の漸近安定性に対応す

る線型化作用素を考察することができる。代表者のこれまでの研究成果を踏まえ、その線型化作用素が生成する半群の時間大域的な L_p 評価を得ることが二つ目の研究目的である。

これらの目的に沿って研究できれば、圧縮粘性流体の Burgers 渦に対して非圧縮粘性流体のそれよりも拡張された結果が得られる。また、これまで圧縮粘性流体においては順圧である場合を扱う事がほとんどであったが、本研究の研究過程には非順圧の場合を扱うという特色がある。これにより、Burgers 渦に限らず非順圧の圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の数学解析が大きく進展すると期待される。

3. 研究の方法

まず、一つ目の研究目的を達成するために、代表者は n 次元 Euclid 空間上の圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解の形を求めようと考えていた。次の二つの場合を検討し、もし流体が順圧である場合において当初の計画通りに進まなければ、流体が非順圧の場合を考えた。このように、Burgers 渦が満たすべき明示解の形を求めることは圧縮粘性流体の順圧性の有無を決めることを意味するので、細心の注意を払いながら研究を実施した。

(1) 流体が順圧の場合

流体が順圧ならば、圧力は密度の関数によって表される。本研究においては圧力を順圧の流体の典型例である密度の冪関数とし、密度を原点・質点間の距離のあるオーダーの関数によって表した。これにより、圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式から導かれる速度場と密度の関係を精査した。

(2) 流体が非順圧の場合

3 次元 Euclid 空間上の非圧縮粘性流体の Burgers 渦の明示解の形に注意すると、圧力が密度と速度場の関数によって表される場合を考えるのも自然である。この場合においては非圧縮粘性流体の Burgers 渦を踏まえ、圧力を密度と速度場によって表される運動エネルギーとし、密度を定数とした。

次に、二つ目の研究目的を達成するために、Burgers 渦の n 次元の漸近安定性に対応する線型化作用素を考察した。非圧縮粘性流体においては Burgers 渦の n 次元の漸近安定性に対応する線型化作用素があり、Lunardi-Metafune、Metafune-Prüss-Rhandi-Schnaubelt によってその線型化作用素が生成する半群の明示公式が得られた。Lunardi-Metafune、

Metafune-Pr Ψ " $\{u\}$ ss-Rhandi-Schnaubelt の方法を踏まえ、代表者は圧縮粘性流体においても先の非圧縮粘性流体における Burgers 渦の n 次元的な漸近安定性に対応する線型化作用素に当たる線型化作用素を導出し、それが生成する半群の明示公式を得ようと試みた。

本研究の帰結として、代表者のこれまでの研究手法、澤田の方法を用いて半群の時間大域的な $L_{\{p\}}$ 評価を得ようと試みた。

参考文献

- ① R. Kakizawa, Resolvent estimates for the linearized operator in $L_{\{p\}}$ associated with motion of compressible viscous fluids, J. Evol. Equ. 12 (2012), 27--58.
- ② A. Lunardi and G. Metafune, On the domains of elliptic operators in $L^{\{1\}}$, Differ. Integral Equ. $\{\Psi\}$ bf 17 (2004), 73--97.
- ③ G. Metafune, J. Pr Ψ " $\{u\}$ ss, A. Rhandi and R. Schnaubelt, The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an $L^{\{p\}}$ -space with invariant measure, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1 (2002), 471--485.
- ④ O. Sawada, The Navier-Stokes flow around the linearly growing steady state with bounded disturbance, Ann. Univ. Ferrara 55 (2009), 367--376.

4. 研究成果

(1) 圧縮粘性流体の Burgers 渦が満たすべき明示解

流体が順圧ならば、圧力は密度の関数によって表される。本研究においては圧力を順圧の流体の典型例である密度の冪関数とし、密度を原点・質点間の距離のあるオーダーの関数によって表した。これにより、圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式から導かれる速度場と密度の関係を精査したが、物理的に意味のある関係は得られなかった。

上記のことから、圧縮粘性流体の Burgers 渦を研究する上で、3次元 Euclid 空間上の非圧縮粘性流体の Burgers 渦の明示解の形に注意すると、圧力が密度と速度場の関数によって表される場合を考えるのが自然であると判明した。この場合においては非圧縮粘性流体の Burgers 渦を踏まえ、圧力を密度と速度場によって表される運動エネルギーとし、密度を定数とした。

(2) 圧縮粘性流体の Burgers 渦の $L_{\{p\}}$ 漸近安定性

Lunardi-Metafune、Metafune-Pr Ψ " $\{u\}$ ss-Rhandi-Schnaubelt の方法を踏まえ、代表者は圧縮粘性流体においても先の非圧縮粘性流体における Burgers 渦の n 次元的な漸近安定性に対応する線型化作用素に当たる線型化作用素を導出し、それが生成する半群の明示公式を得ようと試みたが、当初の計画通りには進まなかった。この状況を踏まえ、代表者は圧縮粘性流体における隠居、代表者の研究手法を援用しようと試みている。

この成果を踏まえ、代表者は圧縮粘性流体の Burgers 渦の n 次元的な $L_{\{p\}}$ 漸近安定性に対応する非線型問題を考察しようと試みている。

参考文献

- ① Y. Kagei, Resolvent estimates for the linearized compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Funkcial. Ekvac. 50 (2007), 287--337.
- ② R. Kakizawa, Resolvent estimates for the linearized operator in $L_{\{p\}}$ associated with motion of compressible viscous fluids, J. Evol. Equ. 12 (2012), 27--58.
- ③ A. Lunardi and G. Metafune, On the domains of elliptic operators in $L^{\{1\}}$, Differ. Integral Equ. $\{\Psi\}$ bf 17 (2004), 73--97.
- ④ G. Metafune, J. Pr Ψ " $\{u\}$ ss, A. Rhandi and R. Schnaubelt, The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an $L^{\{p\}}$ -space with invariant measure, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1 (2002), 471--485.
- ⑤ Y. Kagei, Asymptotic behavior of the semigroup associated with the linearized compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), 763--794.
- ⑥ Y. Kagei, Large time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Hiroshima Math. J. 38 (2008), 95--124.

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[その他]
ホームページ等
Website of Ryohei Kakizawa
<http://www.ipc.shimane-u.ac.jp/~kakizawa/index.html>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
柿澤 亮平 (KAKIZAWA RYOHEI)
島根大学・教育学部・講師
研究者番号：70633163